KIT 数学ガイド

— 授業科目別問題集 —

2026 年度版

京都工芸繊維大学
基盤教育学域
数学分野教員 作成

目次

授業科目別問題集

1. 基礎解析 I

1.1 関数

[1] 二項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (a, b \geq 0,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ を示せ. ただし,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \qquad n! = n\,(n-1)\cdots 2\cdot 1, \quad 0! = 1 \quad \text{である.}$$

[2] 次の逆三角関数の主値を求めよ (答のみでよい). (1) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (2) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

[3] 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で $f(x) \neq 0$ ならば, $f(x)$ は $[a,b]$ で常に正であるかまたは常に負であることを, 中間値の定理を用いて示せ.

1.2 極限

[1] 次の極限値を求めよ. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^n$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

[2] 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\sin\frac{1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^3+2}}{x^2-1}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}$

[3] 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x^2+x}\right)^{x^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$

[4] 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}}{e^x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)}{x^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\log(1+x^2)}$

[5] $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ \log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\ \ (x\to 0)$ を知って次を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\log(1+x)-2x-x^2}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

[6] 次の関数はどんな値をとるか. $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+x^2}{x^{2n}+2}$

[7] 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1}\frac{x}{x+1}-\frac{\pi}{2}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$

[8] 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^{-1}x}{1-\cos(2x)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x+e^{-x}-2}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{(\log x)^2}}$

[9] 次の数列において $n\to+\infty$ の時の極限について考察せよ. 即ち, 存在するときはその値を求め, 存在しないときはそのことを示せ.

(1) $a_n=\dfrac{3n^2+6n+2}{5n^2+2}$ (2) $b_n=n^{\frac{1}{n}}$

[10] 収束する数列は有界であるが, その逆は成立しない. 即ち, 有界数列であっても収束しないものが存在する. その例を 2 つあげよ.

[11] 数列 $\{x_n\}$ を $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{1}{x_n}\quad(n\in\mathbf{N})$ によって定める. $x_1>0$ とする時, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ が存在することを示し, その値を求めよ.

[12] $0<a_1\le b_1$ とし, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\qquad(n\in\mathbf{N})$$

で定める時, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束し, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n$ が成立することを示せ.

[13] 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を次の漸化式で定義する. $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{1}{2}e^{-x_n}\quad(n\in\mathbf{N}),\quad x_1=\alpha>1$

(1) 全ての $n\in\mathbf{N}$ に対して $x_n>0$ を示せ.

(2) $x_2<x_1$ が成立することを示せ.

(3) (2) を用いて全ての $n\in\mathbf{N}$ に対して $x_{n+1}<x_n$ となることを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n$ が存在するか否か考察せよ. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n$ が存在するならばその値が満たすべき関係式を求めよ.

[14] 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{\pi}{2},\ a_{n+1}=\sin a_n\quad(n\in\mathbf{N})$ によって定める. 以下の問に答えよ.

(1) a_2 を求めよ.

(2) 数学的帰納法 (induction) によって $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ.

(3) $a_{n+1}<a_n$ を示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在することを示し, その値を求めよ.

[15] 数列 $\{a_n\}$ を $a_1>0,\ a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}$ で定めるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

[16] (1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\bigl(\cos(\pi x)\bigr)^{2n}$ とおく. $f(x)=0$ または 1 であることを示し, $f(x)=1$ を満たす x の集合を求めよ.

(2) 上の $f(x)$ に対し, $g(x)=\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m!\,x)$ とおく. $g(x)=0$ または 1 であることを示し, $g(x)=1$ を満たす x の集合を求めよ.

[17] (1) 2 次方程式 $x^2+2x-a=0$ の解を求めよ. 但し, $a>0$ とする.

(2) $f(x)=x^2+2x+4$ は $x=0$ で連続であることを ϵ-δ 論法で示せ.

1.3 微分

[1] 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(x^2-1)^{100}$ (2) $\sin x\cos x^2$ (3) $x\log(x^2+x+1)$ (4) $\log(\sin x+2)$

(5) $\log|\sec x+\tan x|$ (6) $\log\log x$ (7) x^x (8) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(9) $\sin^{-1}(2x+1)$ (10) $e^{\sin^{-1}x}$ (11) $\sin^{-1}(x^2)$ (12) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$

(13) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

[2] $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x$ を 逆関数の微分法 を適用して求めよ.

[3] 次の関数の 1 階と 2 階の導関数を求めよ.

(1) $x(\log x)^2$ (2) $\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{x}$ (3) $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x^2})$

[4] 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{x}{1-x}$ (2) $\log(1+2x)$ (3) $x^3\sin x$ (4) $e^x\cos(x+\pi/10)$ (5) $(1+x)\log(1+x)$

[5] 不等式 $2x\tan^{-1}x\geq\log(1+x^2)$ を証明せよ.

[6] 次の関数の $x\to 0$ の時の極限について考察せよ. 即ち, 存在するときはその値を求め, 存在しないときはそのことを示せ.

(1) $\dfrac{\sin 3x}{5x}$ (2) $\left(1+a^2\right)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\dfrac{\cos^2 x-1}{2x^2}$ (4) $\dfrac{e^x-1}{x}$ (5) $\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(6) $\dfrac{\cos 2x-\sin^2 x-1}{x^2}$

[7] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{{a_1}^x+\cdots+{a_n}^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$ ($a_i>0$, n は固定) はどういう不定形か考え, 極限値を求めよ.

[8] 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で, (a,b) で微分可能で, すべての $x\in(a,b)$ に対して $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ は $[a,b]$ で定数関数であることを平均値の定理を用いて示せ.

[9] どこが間違い？

$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ ($x\neq 0$, $f(0)=0$) は微分可能で, $x\neq 0$ のとき $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$. 平均値の定理より $\exists\,\xi$, $f(x)=x\left(2\xi\sin\dfrac{1}{\xi}-\cos\dfrac{1}{\xi}\right)$ だから $x\sin\dfrac{1}{x}=2\xi\sin\dfrac{1}{\xi}-\cos\dfrac{1}{\xi}$. $x\to 0$ のとき $\xi\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0$.

[10] $f(x)$ が C^2 級の関数である時, 次の極限を簡単な形で表せ.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\right)$

[11] $f(x)$ が $I=[a,b]$ で 2 階まで微分可能とする. 平均値の定理とは, $a<x<b$ を満たす x について, ある $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$ があって,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a+\theta(x)(x-a))$$

と書けることである. $\theta(x)$ は, もちろん $f(x)$ と x に依存するが, a にも依存し, 挙動は簡単とは限らない. しかし, しかるべき条件の下で, $x\to a$ のときに $\theta(x)$ が $1/2$ に収束する. このことを証明しよう.

(1) $f(x)$ の $x=a$ における, 2 次までを主要項とし $o((x-a)^2)$ を剰余項とするテーラーの公式を書け.

(2) $g(x)$ が I で連続で $x=a$ で微分可能とする. $g(x)$ の $x=a$ における, 1 次までを主要項とし $o((x-a))$ を剰余項とするテーラーの公式を書け. ($x=a$ で $g(x)$ が微分可能, ということの表現でもある.)

(3) $f''(a)\neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\theta(x)=1/2$ となることを証明せよ. (ヒント：(2) における $g(x)$ と x をうまく選ぶ.)

(4) $f''(a)=0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\theta(x)=1/2$ とならない例（$f(x)$ と a）を挙げよ. もちろん, 反例になっていることが分かるように説明を付けておくこと.

[12] $f(x)=(x^2-1)^n$ とおくと $(x^2-1)f'(x)=2nxf(x)$ となることを示し, この両辺を $(n+1)$ 回微分すると,

$$(x^2-1)f^{(n+2)}(x)+2xf^{(n+1)}(x)-n(n+1)f^{(n)}(x)=0$$

を満たすことを示せ.

[13] (1) 関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ について, 次の問に答えよ.

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ を求めよ.　　(ii) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

(iii) 極値, 変曲点を調べて増減表を作成し, グラフを描け.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$ の 増減, 正負, 不連続点, $x\to\pm\infty$ での極限などを調べて, $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) 関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ のグラフの概形を書け. 但し, x 軸と y 軸は同じ目盛をとること. また, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}y$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y$ の値は, 小数点 1 位までマクローリンの定理を使って求めよ.

(4) 次の関数 $f(x)=x^{1/\sqrt{x}}$ $(x>0)$ のグラフの概形を, 関数の増減, および $x\to+0$, $x\to\infty$ のときの極限値に注意して描け.

(5) 関数 $f(x)=\sqrt{x}\log x$ $(x>0)$ の増減, 凹凸を調べ, その極値を求めよ. また, そのグラフの概形を描き, 変曲点を明示せよ.

[14] (1) 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における 3 次テイラー多項式を求めよ. ただし, テイラー多項式の係数は既約分数で書くこと. (例えば e^x の $x=0$ における 3 次テイラー多項式は $1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3$ である.)

(i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　　(ii) $f(x)=e^x\sin x$

(2) $e^{2x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x$ の漸近展開を $O(x^3)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数を, 0 でない項が 2 つ現れるまでマクローリン展開せよ.

(1) $\sqrt{1+x^2}-1$ (2) $\tan x$ (3) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$

(4) Taylor 展開 及び 関連する定理 を用いて次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

[15] 関数 $f(x)=e^x\sin(x^2+x)$ について, 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f''(x)=f'(x)-(2x+1)^2f(x)+e^x(2x+3)\cos(x^2+x)$ を示せ.

(2) Taylor 展開 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+R_3(x)$ における係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ. 但し, $R_3(x)$ は剰余項である.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$ について考察せよ.

[16] $f(x)=\sin x$ に対して以下の問に答えよ.

(1) $y=f(x)$ の n 階の導関数 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ $(n\in\mathbf{N}\cup\{0\})$ を求めよ.

(2) $y^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(3) (2) を用いて Taylor 展開 $\displaystyle\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ が成立することを示せ.

(4) (3) を利用して $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ を求めよ.

[17] (1) 次の関数をマクローリン展開しなさい.

(1) $x^2e^{x^2}$ (2) $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$ (3) $(2\sin 2x\cos 2x)^2$

(2) $\log(1+2x+x^2)$ に対する Maclaurin の公式を述べ, 剰余項の形を記せ.

[18] $\sqrt[3]{2}\fallingdotseq 1.2599$ をニュートンの近似法で求めよ.

[19] 定円に内接する三角形の内で, 面積最大のものを求めよ.

[20] y 軸上に 2 点 A$(0,1)$ と B$(0,3)$ をとる. x 軸上の点 P$(x,0)$ に対して角 $\angle$APB を $\theta(x)$ で表す. (ただし $0\le\theta(x)\le\pi/2$ とする.) $\theta(x)$ の導関数 $\theta'(x)$ を求めよ. さらに, $x>0$ の範囲で動くとき, $\theta(x)$ の最大値を求めよ.

[21] 追跡線 $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ の概形を描き, この曲線上の点 P における接線と x 軸との交点を T とすると PT は一定であることを示せ.

[22] 曲線 $y=\log x$ $(x>0)$ の曲率を求めよ.

[23] Lemniscate $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ を極座標を使って表し, グラフの概形を描け.

1.4 積分

[1] 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x-10}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x-12}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (9) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

(14) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x\,dx$ (15) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}\,dx$ (16) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

[2] 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(3x)^2}$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2+\cos x}{1+\sin x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(2-x)}}$ (5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3^2}}$ (6) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{-4x+2}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos x}dx$

[3] (1) 次の不定積分を求めるため, 部分積分を実行して漸化式を導け. また, I_3 を求めよ.

$$I_n = \int (\log x)^n\,dx \qquad (n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$$

(2) 次の不定積分を求めるため, 部分積分を実行して漸化式を導け. また, K_3 を求めよ.

$$J_n = \int x^n \sin x dx\,, \quad K_n = \int x^n \cos x dx$$

[4] $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$ とおく. $f(x)$ を部分分数に分解し, それを用いて $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を計算せよ.

[5] 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(x+1)(x+3)}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4-16}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x+\sin x}$

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ (8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \exp(\sin x) dx$ (9) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$

[6] $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) I_0, I_1 を求めよ. (2) I_n の満たす漸化式を導け. (3) 一般項 I_n $(n \geq 2)$ を求めよ.

[7] 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^3(x^2+1)}$ に対して

(1) 原始関数 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ. (2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ.

[8] (1) $s>0$ のとき, $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$, $\Gamma(n)=(n-1)!$ (n は 自然数) を示せ.

[9] 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+2x)(1+x)}$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+3x^2}$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$ (5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ (9) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^{-x}+1+e^x+e^{2x}}\,dx$ (11) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ (a, b は定数, $a>0$)

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (13) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx$

[10] 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{log}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{sin}x}}$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^3}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}}$

[11] (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$ について考察せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ.

[12] $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\sin x\,dx$, $J_n=\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\cos x\,dx$ と定める. 以下の問に答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とするとき, k についての数学的帰納法 (induction) によって

$$A^{4k}=(-4)^k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^{4k+1}=(-4)^k\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{4k+2}=2(-4)^k\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^{4k+3}=-2(-4)^k\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

が成立することを示せ. 但し, $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ であり, A^0 は 2 次の単位行列である.

(2) $y=e^x$ を $x=0$ の周りで漸近展開せよ.

(3) 前問 (2) を用いて, $x\geq 0$ ならば任意の $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ に対して $e^x\geq \dfrac{1}{m!}x^m$ が成立することを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$ を求めよ.

(5) 前問 (3) を用い, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n\sin x$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n\cos x$ を求めよ. 但し, $n\in\mathbf{N}$.

(6) I_0 と J_0 をそれぞれ求めよ.

(7) I_n と J_n をそれぞれ部分積分することで I_n, J_n と I_{n-1}, J_{n-1} の間の漸化式を求めよ.

(8) $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} I_n \\ J_n \end{pmatrix}$ とおき, 前問 (7) の漸化式を用いて, $\mathbf{v}_n = \dfrac{n!}{2^n} A^n$ を示せ.

(9) $\mathbf{v}_n$ を求めよ.

(10) 点列 (I_n, J_n) を xy 座標に図示し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (I_n, J_n)$ を考察せよ.

[13] 次の曲線の長さを求めよ.

(1) $y = x(1-x) \quad (0 \le x \le 1)$

(2) (i) $y = \log x \quad (\frac{5}{12} \le x \le \frac{3}{4})$ (ii) $y = \log x \quad (\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8})$

(3) $y = \log(\sin x) \quad (\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2})$

(4) パラメータ表示 $x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線.

(5) 陰関数表示 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \ (x \geqq 0,\, y \geqq 0)$ で表される曲線.

(6) 曲座標表示 (極方程式) で表される曲線

(i) $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ (ii) $r = \cos^2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$

(iii) $r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi,\, a > 0)$

[14] (1) 次の不等式で与えられる平面の領域 D の面積を求めよ. $D : 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2},\ 0 \leqq y \leqq x\,\mathrm{Sin}^{-1} x$

(2) x 軸の正の部分, y 軸の正の部分, 及び 曲線 $C : x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \ (\theta \in [0, 2\pi))$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(3) 次のパラメータ表示で表される曲線を C とする. $\begin{cases} x = \sin^2\theta\cos\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \quad (0 < \theta < \pi)$

(i) 曲線 C の概形を書け. (ii) 曲線 C が囲む面積を求めよ.

(4) Cycloid $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \sin t)$ の１つの弧と x 軸の間の面積を求めよ. またその弧の長さを求めよ.

[15] 長さ 1 の棒があり, 端から $x \ (0 \leqq x \leqq 1)$ の位置にある点における 質量密度 が $\rho(x) = 1 + x$ であるという. この棒の重心の位置を求めよ.

[16] 曲線 $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$ を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

[17] 閉区間 $[1, 2]$ を考える. n を自然数として, この区間を次の (i), (ii) のように n 個の小区間に分割する. この分割を Δ_n と表す.

(i) 定数 r（$0 < r < 1$）を $2r^n = 1$ となるように定める.

(ii) $x_0 = 2r^n (= 1),\, x_1 = 2r^{n-1},\, x_2 = 2r^{n-2},\, \ldots,\, x_{n-2} = 2r^2,\, x_{n-1} = 2r,\, x_n = 2$ によって n 個の小区間に分割する.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする. 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ において $f(x)$ が最小値を取る点を ξ_i とする. 関数 $f(x)$ の, 分割 Δ_n と $\{\xi_i\}$ に関するリーマン和を $R(\Delta_n, \{\xi_i\})$ とする.

(1) $R(\Delta_n, \{\xi_i\})$ を (なるべく簡単な) n の式で表せ.

(2) 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2$ を用いて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R(\Delta_n, \{\xi_i\})=\log 2$ を示せ.

[18] (1) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$ を求めよ. さらに, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (-\log x)\,dx$ を求めよ.

(2) 区間 $(0,1]$ 上定義された連続関数 $f(x)$ は, $(0,1]$ 上で $f(x)\geq 0$, 狭義単調減少かつ $(0,1]$ 上広義積分可能であるとする. このとき, 任意の自然数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$S_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \;<\; \int_0^1 f(x)\,dx$$

(3) (1), (2) を用いて, 任意の自然数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ. $\quad n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

[19] 以下の命題群の中から結論が偽なるものを選べ. 次に, その命題が偽である反例を与えるか, 正しい命題に直し, 結論を証明せよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ を満たすならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限確定値として存在する.

(2) 1 変数関数 $y=f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば, $f(a)$ は $y=f(x)$ の極値である.

(3) $(e^x\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$ かつ $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ なので, L'Hôpital の定理より次の等式が成り立つ.

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^x\sin x}{\log x} \;=\; \lim_{x\to +0} xe^x(\sin x+\cos x)=0$$

(4) $f(x)$ が $(0,1]$ で連続で $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=\infty$ ならば, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\infty$ である.

2. 基礎解析 II

2.1 偏微分

[1] 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2xy^2}{2x^2+3y^2}$ を求めよ.

[2] 次の関数に対して $(x,y)\to(0,0)$ の時の極限値が存在するか否か考察し, 存在するならその値を求めよ.

(1) $f_1(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$ (2) $f_2(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$

(3) $f_3(x,y) = \dfrac{x}{x+y^3}$ (4) $f_4(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[3] 次の関数 $f(x,y)$ について, 以下の問に答えよ.

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ (ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(1) $f(x,y)$ の $(0,0)$ での連続性を考察せよ. (2) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の $(0,0)$ での全微分可能性を考察せよ.

[4] $\Delta f \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f$ とおく. 次の関数に対して Δf を求めよ.

(1) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ (2) $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

[5] $z = xy$ の点 (a,b,ab) における 接平面 および 法線 を求めよ.

[6] $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ の 第 2 次偏導関数 を求めよ.

[7] $z = f(x,y)$ を 偏微分の順序交換 や chain rule などの一連の定理が適用できる程度に滑らかな関数とする. 新しい変数 (u,v) を $x = u\cos v,\ y = u\sin v\ \ (u>0,\ 0\le v<2\pi)$ によって導入するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\sin v$ と $\cos v$ を x, y を用いて表現せよ.

(2) z_u, z_v を z_x, z_y と x, y を用いて表せ.

(3) $z = f(x,y)$ が $u = \sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数であるとき, 即ち, $z = f(u)$ であるとき, z の満たすべき関係式を導出せよ.

[8] $z = f(x,y)$ が C^2 級のとき, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を代入したときの $z_{r\theta} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}$ を求めよ.

[9] $z=f(x,y)$ に対して, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき, 以下の等式が成立することを示せ.

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ = \ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

[10] $x=r\cosh(t),\ y=r\sinh(t)$ という関係があるとき, ヤコビアン（or ヤコビ行列式）$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$ を計算せよ.

[11] $z=f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数とする. 次の座標変換を導入する. このとき以下の問に答えよ.

$$(x,y)=\left(\frac{r\left(e^\theta+e^{-\theta}\right)}{2},\frac{r\left(e^\theta-e^{-\theta}\right)}{2}\right)$$

(1) x^2-y^2 を (r,θ) の式で表せ.　(2) $\dfrac{\partial f}{\partial r},\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ と r,θ を用いて表せ.

(3) 次の等式が成立することを示せ.　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \ = \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

[12] $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた領域で定義された滑らかな関数 z が 1 変数の関数 f により $z=f(x^2+y^2)$ と表されるとする.

(1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.　(2) $f(t)=\log t$ のとき, z が 調和関数 であることを示せ.

[13] C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ に対し, f の ラプラシアン Δf は次式で定義される.

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

f が $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけに依存して $f(x,y,z)=g(r)$ と書けるとき, 次の問に答えよ.

(1) Δf を g'' と g' を用いて表せ.　(2) $\Delta f=0$ をみたす g の一般形を求めよ.

[14] (1) 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$ について, (i) 極値をとる点の候補を求め, (ii) 極値を持つかどうか判定し, (iii) 極値を持つときは極大 (小) 値を求めよ.

(2) 次の関数の $\mathbf{R}^2$ 上での極値を求めよ.

(i) $f(x,y)=(y^2-y+xy)e^x$　(ii) $g(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$

(3) 関数 $f(x,y)=-x^4-2x^2y^2-y^4+2x^2-2y^2$ は極小値を持たないことを示せ.

[15] (1) $x^3+3axy+y^3=0$ で定義される関数 $y=f(x)$ について $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $xy-\sin x-\sin y=0$ 上の点 $(0,0)$ において $\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ.

[16] $\mathbf{R}^2$ 上で定義された関数 $F(x,y)=x^2y+3y^3-y-2$ を考える.

(1) $F(x,y)$ の $\mathbf{R}^2$ における極値を求めよ.

(2) $F(x,y)=0$ で定義される陰関数 y の極値を求めよ.

(3) $F(x,y)=0$ の条件の下で, $f(x,y)=x^2+2y^2$ の極値を求めよ.

[17] (1) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ と $g(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ について, 条件 $g(x,y)=0$ の下で, $f(x,y)$ の極値を与える可能性のある点を列挙せよ. (極小値か, 極大値かを判定しなくてもよい.)

(2) 点 (x,y) が条件 $x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0$ を満たして動くときの関数 $f(x,y)=p\log x+q\log y$ の極値を求めよ. 但し, $p,q>0$ である.

(3) 条件 $x^2+y^2=1$ の下で, $f(x,y)=x^2y^2$ の最小値, 最大値 (極大値, 極小値) を求めよ. 但し, Lagrange の 未定乗数法 を用いること.

(4) 条件 $x^2+3y^2=1$ の下での $f(x,y)=xy$ の極値を偏微分を使って求めよ.

[18] 条件 $x^2+y^2\leq 1$ の下で $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ $(a,b,c$ は定数$)$ の最大値, 最小値を求めよ.

[19] (1) $I(a,b)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)^2dx$ とおく. $I(a,b)$ を最小にする a,b の値と, そのときの最小値を求めよ.

(2) $J(a,b,c)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)^2dx$ について同様な問題を考えよ.

[20] O を中心とする円に $\Delta\mathrm{ABC}$ が内接している. この円の半径を 1, $\angle\mathrm{BOC}=x$, $\angle\mathrm{AOC}=y$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\angle\mathrm{AOB}$ を x と y の式で表し, x と y の取り得る範囲を求めよ.

(2) $\Delta\mathrm{AOB},\ \Delta\mathrm{AOC},\ \Delta\mathrm{BOC}$ の面積を x と y を用いて表せ.

(3) $\Delta\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのはどのような場合か.

2.2 微分方程式

[1] (1) 微分方程式 $y'=\dfrac{y}{x(x+1)}$ の一般解を, 変数分離の方法で求めよ.

(2) $x>0$ の範囲で, 微分方程式 $y'=y\log x$ の一般解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y'=2xy(y-1)$ の解 $y=y(x)$ で, 初期条件 $y(0)=2$ を満たすものを求めよ.

[2] 次の微分方程式を解け.

(1) $y'=y$ (2) $y'=2xy$ (3) $x^3y'=2y$ (4) $y'=x^2y^3$ (5) $x^2y'+y^2=0$

(6) $(1+x^2)y'=1+y^2$

[3] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'=x+y$ (2) $y'-ay=b\sin x$ (3) $y'+(\sin x)y=\sin x$ (4) $xy'-2y=x^3\sin x$

(5) $xyy'=x^2+y^2$ (6) $xyy'=y^2-3x^2$ (7) $2xyy'=x^2+3y^2$

(8) $y'+y=xy^2$ (9) $y'-y=xy^2$ (特異解に注意)

(10) $(y+x)^2y'=1$ (Hint. $y+x=u$ とおき u の微分方程式に変換する.)

[4] ベルヌーイの方程式 $y'=-\dfrac{y}{x}+x^2y^3$ を 1 階線型微分方程式に帰着せよ.

[5] (1) $(x^2-2y)dx+(y^2-2x)dy=0$ が 完全微分形 であることを示して一般解を求めよ.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ. (i) $ydx+xdy=0$ (ii) $ydx-xdy=0$

[6] (1) $b\neq 0$ に対して $\displaystyle\int e^{bx}\,dx$ を求めよ.

(2) $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ と $a\in\mathbf{R}$, $b\neq 0$ に対して $I_n=\displaystyle\int(x-a)^n e^{bx}\,dx$ と定める. このとき部分積分により I_{n+1} と I_n の間の漸化式を導け.

(3) 微分方程式 $y'=\dfrac{x^3e^x}{y}$ の一般解を y^2 の式で求めよ. 但し, $y=0$ は考えなくても良い.

[7] 次の リッカチの微分方程式 を以下の手順に従い解け. $y'=\dfrac{x}{(x-1)^2}y^2+\dfrac{3x}{x-1}y-4x+1$ $(*)$

(1) 次の等式が成立することを示せ： $(x-1)^4=x(x-1)^3-(x-1)^3$

(2) $(*)$ の特殊解で $y=ax+b$ の形のものを求めよ.

(3) 前問 (2) で得られた特殊解 $y=ax+b$ を用いて, x の関数 z を $y=\dfrac{1}{z}+(ax+b)$ によって定める. このとき $(*)$ を z の微分方程式に変換すると, 次の形になることを示せ.

$$z'+\frac{5x}{x-1}z=-\frac{x}{(x-1)^2}$$

(4) $(*)$ の一般解を求めよ.

[8] 次の微分方程式を以下の手順で解け. $y'=y^2+(e^x+1)\,y-2e^{2x}$ $(*)$

(1) $(*)$ は $y=e^x$ を解に持つことを示せ.

(2) $y=e^x+\dfrac{1}{z}$ を $(*)$ に施すと, z の微分方程式 $z'+(3e^x+1)\,z=-1$ が得られることを示せ. 但し, z は x の関数 $z=z(x)$ である.

(3) $z'+(3e^x+1)\,z=0$ の一般解を求めよ.

(4) $(*)$ の一般解を求めよ.

[9] α を実数の定数とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) 2 次方程式 $\lambda^2-\alpha=0$ の根を求めよ.

(2) 微分方程式 $y''-\alpha y=0$ の一般解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y''+y=-3\cos 2x$ の一般解を求めよ.

(4) 区間 $[0,1]$ で (2) の微分方程式を考えるとき, 条件 $y(0)=y(1)=0$ を満たす解を求めよ. また, そのときの α の満たすべき条件も求めよ.

[10] 斉次方程式の一般解から定数変化法を経て, 微分方程式 $y''+4y=e^x$ の一般解を求めよ.

[11] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - 3y' + 2y = 12$　(2) $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$　(3) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2 + 10x + 6$

(4) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$　(5) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$　(6) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$

(7) $y'' + 4y' - 5y = e^{2x}$　(8) $y'' - y' = xe^{x}$　(9) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$

(10) $y'' + 4y = 2\sin 2x$　(11) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\sin 2x$

[12] 微分方程式 $y'' + y = \sin(2x)$ の特殊解のうち, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

[13] 次の微分方程式を以下の手順で解け.　$y'' + 4y = 0$　$(*)$

(1) (i) 漸化式 $\begin{cases} b_{n+1} = -4b_{n-1} & (n \in \mathbf{N}) \\ b_1 = 1,\ b_0 = 0 \end{cases}$ で定義される 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ とする時, $A^{n+1} = A \cdot A^n$ と書けることを利用して A^n を求めよ.

(iii) 指数行列 $e^{xA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k A^k$ を求めよ.

(2) (i) $z = y'$ とおくとき, $(*)$ は次の形に書けることを示せ.　$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$　$(**)$

(ii) 方程式 $(**)$ は $\dfrac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ と書けるが, この方程式の解は, C_0, C_1 を任意定数として

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = e^{xA} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

と書ける. これを利用して $(*)$ の一般解を求めよ.

3. 線形代数学 I

3.1 複素数平面

[1] 方程式 $x^5=1$ の複素数解は 5 個ある．そのうち実部と虚部が正である解を α とおく．

(1) α の偏角 θ と絶対値 $|\alpha|$ を求めよ．

(2) 方程式 $x^5=1$ の 5 つの解を複素数平面に図示せよ．各複素数を具体的に計算する必要はない．偏角と絶対値に留意せよ．

[2] 方程式 $x^5=-1$ について [1] と同じことをせよ．

[3] $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\in\mathbb{R}$ と $1\leq n\leq 15$ の両方を満たす整数 n をすべて挙げよ．

[4] $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n\in\mathbb{R}$ と $1\leq n\leq 10$ の両方を満たす整数 n をすべて挙げよ．

3.2 3 次元ベクトル

[1] この問題では 3 次元ベクトルのみを扱う．(,) は内積，$\times$ は外積を表す．また，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は基本単位ベクトルを表す．

(1) 次の値を求めよ．

$((\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\times(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3),\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1)$, $\quad ((\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)\times(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$, $\quad ((\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\times(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1)$.

(2) (i) $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ に直交して長さが 1 のベクトルを求めよ．

(ii) $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ に直交して長さが 1 のベクトルを求めよ．

(3) 空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 $\triangle$ABC とその上の任意の点 P を考える．原点 O から P へのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $s+t+u=1,\ s\geq 0,\ t\geq 0,\ u\geq 0$ という条件を満たす実数 s, t, u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せることを示せ．

(4) (i) 任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=2\|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{b}\|^2$ という等式が成立することを示せ．

(ii) $\boldsymbol{u}$ を長さ 1 のベクトルとするとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ という等式が成立することを示せ．

(5) $\|s(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+t(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)-\boldsymbol{e}_3\|$ が最小になるような s, t の値を求めよ．

(6) O を原点とする空間の中で 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ΔABC を考える．$\triangle$ABC 上の任意の点 P に対して $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ が P によらず一定の値をとることを示せ．

[2] $\mathbf{R}^3$ の 3 点, 原点 O, A $(1,2,1)$, B $(1,-1,2)$ を頂点とする三角形 △OAB を考える. △OAB を底辺とする直角三角柱 OABCDE で体積が 70 の物を作りたい. 但し, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ である. C の座標を求めよ.

3.3 行列の計算

[1] 次の行列 A, B に対し, 行列の和 $2A + {}^tA$ 及び 行列の積 AB を求めよ.

$$(1)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

[2] (1) 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ について, ${}^t(AB)$, ${}^tA\,{}^tB$, ${}^tB\,{}^tA$ を求めよ.

(2) 任意の 2 次正方行列 A, B について, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ であることを証明せよ.

[3] n 次正方行列 A は, その転置行列 ${}^tA$ が元の行列と一致するとき, つまり ${}^tA = A$ となるとき, 対称行列と呼ばれ, その転置行列 ${}^tA$ が元の行列の -1 倍になるとき, つまり ${}^tA = -A$ となるとき, 交代行列と呼ばれる. 任意の n 次正方行列 A は対称行列と交代行列の和の形に一意的に表されることを証明せよ.

[4] A を実数を成分とする 2 行 2 列行列とする. 行列 A が次の条件を満たしたとする: “どんなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ についても, 反時計回りに $\pi/3$ の角度だけ回転した位置にベクトル $A\boldsymbol{x}$ がある.” この行列 A を具体的に記せ. ここでいう平面とは, 第 1 成分を右方向に, 第 2 成分を上方向に定めた座標平面である.

3.4 連立一次方程式

[1] 次の x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 についての連立一次方程式が解をもつのは k の値が何であるときか, その k に対して連立一次方程式の解の全体はそれぞれどうなるか, 求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = k \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = k^2 \end{cases}$$

[2] 次の連立 1 次方程式が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解をもつように a の値を定めよ. また, そのときの解の一般的表示 (任意定数を含む) を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

[3] 次の連立１次方程式に対して解の存在条件 (b_1, b_2, b_3 が満たすべき方程式) と解の一般的表示 (任意定数を含む) を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = b_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = b_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases}$

[4] 次の連立方程式に対して, 係数行列 A, 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ の階数を求めて解があるかどうか調べ, 解がある場合はそのすべての解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 7x_4 + x_5 = 8 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = a \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 = -5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 7x_4 + x_5 = a \end{cases}$

[5] 以下の方程式を解け. 解が存在しない時は “存在しない” と答えよ. 解が一意でない場合にはパラメーターを用いて表せ.

(1) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x - 4z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = -2 \\ x + 8y + 27z = 12 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ x + 2y = -2 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x + 3y - 3w = 6 \\ 3x - 4y - 6z - 2w = -2 \\ x - z - w = 1 \end{cases}$

3.5 逆行列

[1] 以下の行列の逆行列を求めよ. 逆行列が存在しない場合には “存在しない” と答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[2] 次の行列が正則であるかどうか判定し, 正則であればその逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -10 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -10 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & -10 & -8 \end{pmatrix}$

[3] 次の行列が正則であれば逆行列を求め, 正則でなければ階数 (rank) を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4] 次の行列 A, B に対し 逆行列 A^{-1}, B^{-1} を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2) \quad B = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[5] n 次正方行列 A, P, Q が $PAQ = E$ (単位行列) を満たしているとき, A は正則行列であることを示し, A の逆行列 A^{-1} を P, Q を用いて表せ.

3.6 行列式

[1] 以下の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[2] 次の行列式の値を求めよ. (i は虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ である.)

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} i & -1 & 2i & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \\ -i & 1 & 1 & 3i \\ 1 & 2i & -1 & -2i \end{vmatrix}$

[3] 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} a^2+5 & 3a & 2\sqrt{5} \\ 3a & 14 & a\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & a\sqrt{5} & a^2+9 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} a^2+3 & 2a & 2\sqrt{3} \\ 2a & 7 & a\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & a\sqrt{3} & a^2+4 \end{vmatrix}, \quad (3) \begin{vmatrix} x+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x+a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & x+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

[4] 次の行列式の値を計算せよ. なるべく因数分解した形を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & d_3 \\ a_4 & 0 & c_4 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \\ a_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$$

[5] 次の行列が正則でないような x の値をすべて求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{pmatrix}$$

[6] (1) 行列 $\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ のランクが 3 でないとき, t のとる値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix}$ のランクが 3 でないとき, t のとる値を求めよ.

[7] (1) ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ が平行であるときの t を求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} t \\ t+2 \end{pmatrix}$ が平行であるときの t を求めよ.

[8] 次の x についての方程式の解を求めよ. (i は虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ である.)

$$(1)\ \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)\ \begin{vmatrix} x & -i & -1 & -1 \\ i & x & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x & -i \\ 1 & 1 & i & x \end{vmatrix} = 1$$

[9] 任意の 4 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ とスカラー s, t に対して次の等式が成立することを示せ.

$$\begin{aligned}(s^4-t^4)\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4) &= \det(s\boldsymbol{a}_1-t\boldsymbol{a}_2, s\boldsymbol{a}_2-t\boldsymbol{a}_3, s\boldsymbol{a}_3-t\boldsymbol{a}_4, s\boldsymbol{a}_4-t\boldsymbol{a}_1) \\ &= \det(s\boldsymbol{a}_1+t\boldsymbol{a}_2, s\boldsymbol{a}_2+t\boldsymbol{a}_3, s\boldsymbol{a}_3+t\boldsymbol{a}_4, s\boldsymbol{a}_4+t\boldsymbol{a}_1)\end{aligned}$$

[10] 奇数次の交代行列は正則ではないことを示せ.

[11] (1) A, B を実 n 次正方行列として次を示せ. $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

(2) 任意の $n\times n$ 正則行列 A, B に対して次の等式が成立することを示せ.

$$\frac{\det(I-A^{-1}B)}{\det B} = (-1)^n\frac{\det(I-AB^{-1})}{\det A}$$

[12] (1) 次の置換 σ, τ について, 置換 $\sigma^{-1}, \tau\sigma, \sigma^{-1}\tau\sigma$ を求め, その置換の符号を記せ.

(i) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 7×7 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式の展開における次の項の係数を求めよ.

(i) $a_{27}a_{74}a_{42}a_{15}a_{56}a_{63}a_{31}$　　(ii) $a_{16}a_{62}a_{21}a_{35}a_{54}a_{47}a_{73}$

[13] 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1) σ を巡回置換の積で表せ.　(2) σ を互換の積で表せ.　(3) $\mathrm{sgn}(\sigma)$ の値を求めよ.

[14] x_1, x_2, x_3, x_4 を相異なる 4 つの実数とし, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 \end{pmatrix}$ の逆行列を W とする.

(1) W の $(i, 4)$ 成分 W_{i4} を求めよ. (但し, $i = 1, 2, 3, 4$.)

(2) 次の等式を示せ. (但し, $(x_i)^0 = 1$ である.)

$$\frac{(x_1)^k}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{(x_2)^k}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \frac{(x_3)^k}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \frac{(x_4)^k}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1, 2) \\ 1 & (k = 3) \end{cases}$$

[15] 次の行列およびベクトルについて, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 13 \\ 1 & 3 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) (i) $|A|, |B|, |C|$ の値を求めよ.

(ii) A, B, C について正則なものを全てあげ, それらについて逆行列を求めよ.

(2) (i) $\mathrm{rank}(B)$ の値を求めよ.　(ii) 連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ を解け.

(3) (i) $\mathrm{rank}(C)$, $\mathrm{rank}(C \,|\, \boldsymbol{b})$, $\mathrm{rank}(C \,|\, \boldsymbol{c})$ の値を求めよ.

(ii) 連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.　(iii) 連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を解け.

4. 線形代数学 II

4.1　ベクトル空間・線形写像

[1] n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を考える.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ を r 個の n 次元数ベクトルとする.

「$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_r}$ が 1 次従属である」ということの<u>定義</u>を簡潔に述べよ.

(2) W を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする.

「W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間である」ということの<u>定義</u>を簡潔に述べよ.

(3) W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で, $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, ..., \boldsymbol{p_k}$ は W の元であるとする.

「k 個の数ベクトルの組 $\{\ \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, ..., \boldsymbol{p_k}\ \}$ が W の基底である」ということの<u>定義</u>を簡潔に述べよ.

ただし、「1 次結合」、「1 次独立」という用語は説明抜きで用いてよい.

[2] $\mathbb{R}$ 上の線型空間 V の部分空間 U_1, U_2 に対し、$U_1 \cap U_2$ も V の部分空間であるかどうか調べよ.

[3] $\mathbb{R}$ 上の線型空間 V の元 v_1, v_2, v_3 が一次独立であるとき, V の次の 3 つの元

$$u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3, \quad u_2 = 2v_1 + v_2 + 3v_3, \quad u_3 = 5v_1 + 4v_2 - 3v_3$$

が一次独立であるかどうか調べよ.

[4] 次の 3 つのベクトルの組 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ は, 一次独立, 一次従属, どちらであるか, 示しなさい.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[5] 数ベクトル空間 $\mathbf{R}^5$ の元

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

により, 部分空間 $U = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \rangle$ と $V = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle$ を定義する. 和空間 $U + V$ と共通部分 $U \cap V$ の次元および基底を求めよ.

[6] 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ を考える. $\mathbf{R}^3$ の次の部分空間の基底を一組求めよ.

(1) $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ で生成される部分空間　　(2) 連立一次方程式 $x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ の解空間

[7] 以下の各問に対して, 根拠 (理由, 計算など) を示して答えよ.

(1) n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるとする. このとき $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$ は線形独立か?

(2) n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ に対して

$$\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 2, \quad \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) = 2, \quad \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 2$$

とする. このとき $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ を求めよ.

(3) n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ と線形写像 $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ に対して $T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)$ は線形独立であるとする. このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立か?

[8] m 行 n 列行列 A は n 次複素数ベクトルを m 次複素数ベクトルに写す写像 $A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を与える. この写像は線形である. 線形性とはどういう性質か, 数学的な定義を述べよ.

[9] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ に対し写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $T_A(x) = Ax \ \ (x \in \mathbb{R}^3)$ で定める.

(1) T_A は線型写像であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底 $(1,0,1), (1,-1,-1), (0,1,1)$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $(1,2), (0,1)$ に対する T_A の表現行列 F を求めよ.

[10] 複素係数の 2 次正方行列の全体 M_2 は, 行列の和と複素数によるスカラー倍によって, 複素線形空間となる. その基底として,

$$\vec{e_1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_2} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_3} = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_4} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を取る. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問に答えよ.

(1) 写像 $\varphi \colon M_2 \to M_2$ を $\varphi(X) = AX - XA$ で定義する. φ は M_2 の線形変換である. φ の行列表示を求め, 更に, 像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ と核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ の次元および基底を求めよ.

(2) $\psi \colon M_2 \to M_2$ を $\psi(X) = AX + XA$ で定義するとき, ψ の行列表示を求め, 更に, 像 $\mathrm{Im}\,\psi$ と核 $\mathrm{Ker}\,\psi$ の次元および基底を求めよ.

[11] $\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}[x]_3 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ を考える.

(1) $\mathbb{R}[x]_3$ の基底を一組求めよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_3$ の 2 つの元 $f_1(x) = 1 + 2x + 3x^3$, $f_2(x) = -1 + 2x - 3x^3$ を含む $\mathbb{R}[x]_3$ の基底があるかどうか調べ、あれば求めよ.

4.2 固有値・固有ベクトル, 対称行列・直交行列

[1] 次の行列 A, B について, 以下の問に答えよ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 B は固有値 2 を持つことがわかっている. 固有値 2 に対する固有ベクトルをすべて求めよ. ただし、連立 1 次方程式を解く際は、はき出し法を最後まで用い、その手順を省略せずに記すこと.

[2] 次の行列 A の固有値・固有ベクトルを全て求めよ. 更に, 正則な行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在するかどうかを判定し, 存在すればそれを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

[3] 次の実対称行列 A を対角化する実直交行列 P と対角化された行列 $D = P^{-1}AP$ を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

[4] t を定数, (x_1, x_2) を平面の座標とするとき, 方程式 ${x_1}^2 + 4x_1x_2 + t{x_2}^2 = 1$ はどのような曲線を表すか. t の値に関して適当に場合分けして答えよ.

[5] 次の実対称行列 A に関して以下の各問に答えよ.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 固有値を求めよ. (2) 各固有値に対して固有ベクトルを求めよ. (3) 対角化せよ.

(4) $\mathrm{Tr}(A^k + A^{-k})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ. (5) $\det(A^k + A^{-k})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

[6] 次の実対称行列 A に関して以下の各問に答えよ.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 固有値と固有空間を求めよ. (2) 直交行列によって対角化せよ.

(3) A を係数とする 2 次形式を標準形へ直交変換せよ.

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して各固有空間への直交射影はどのように表せるか.

[7] U と V を $n \times n$ 直交行列とする.

(1) UV と U^{-1} も直交行列であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系のとき，$V\boldsymbol{u}_1, \cdots, V\boldsymbol{u}_k$ も正規直交系であることを示せ.

[8] 次のエルミート行列 A を対角化するユニタリー行列 P と対角化された行列 $D = P^{-1}AP$ を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & -3i \\ 3i & -2 \end{pmatrix}$

[9] A, B を実 n 次正方行列とする. 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(1) 複素 n 次正方行列 $A + iB$ がユニタリー行列となる.

(2) 実 $2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列となる.

5. 数学演習 I

5.1　複素数

[1] 次の複素数を極形式で表せ:　(1) $1+\sqrt{3}\,i$　(2) $-3\,i$

[2] 複素数 $z=-1+\sqrt{3}i$ について次を極形式で表し, 複素数平面上に図示せよ:

(1) z　(2) z^3　(3) $z^{\frac{1}{3}}$

[3] 次の方程式を解け:　(1) $z^3=-i$　(2) $z^6=1$

[4] $z=-\sqrt{3}+i$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) z を極形式で表せ. (答のみでよい.)

(2) 自然数 n に対して, z^n が正の実数となる為の n の条件を求めよ.

[5] 複素数 $a=1+\sqrt{3}i,\ b=\dfrac{1-i}{2}$ について, $c=ab$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) $a,\ b$ を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.

(2) c を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.

(3) c^n が正の実数になるような最小の自然数 n を求め, そのときの大きさ $|c^n|$ を求めよ.

[6] 複素数 $a=\sqrt{3}-i,\ b=\dfrac{-1+i}{4}$ について, $c=a^2b$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) $a,\ b$ を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.

(2) c を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.

(3) c^n が正の実数になるような最小の自然数 n を求め, そのときの絶対値 $|c^n|$ を求めよ.

[7] 複素平面上で複素数 z が $|z|=1$ を満たしながら動いている. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z+2$ の動きうる範囲を図示せよ.

(2) $z+2$ の偏角 θ のとり得る値の範囲を求めよ. ただし, $0\leq\theta<2\pi$ とする.

[8] $z=x+iy\ \ (x,\,y\in\mathbf{R})$ とする. 次の関係式をみたす z はどのような図形を表すか.

(1) $|z-i|=1$　(2) $|z-1|=|z-i|$　(3) $|z+1|=\sqrt{2}|z-1|$

[9] (1) 複素平面上の写像 $f_{a,\theta}(z)=e^{i\theta}(z-a)+a\ \ (a\in\mathbf{C},\ -\pi<\theta\leq\pi)$ は, 点 a を中心とした角 θ の回転を表すことを示せ.

(2) 複素平面上の写像 $g_{a,\theta}(z) = e^{2i\theta}\,\overline{z-a} + a \ \left(a \in \mathbf{C},\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ は, 点 a を通り実軸と θ の角度をなす直線に関する対称移動を表すことを示せ.

(3) 複素平面上に 2 本の平行でない直線があり, それに関する対称移動が $g_{a,\theta},\ g_{b,\tau}$ $\left(a,\ b \in \mathbf{C},\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \tau \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとする. このとき, 合成写像 $g_{b,\tau} \circ g_{a,\theta}$ はある点を中心とする回転写像であることを示し, その回転角, および回転の中心を表す複素数を求めよ.

[10] $a = \dfrac{1+i}{2},\ b = \sqrt{3} + i,\ c = a^3 b$ とおくとき, a, b を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ. また c の絶対値および偏角を求めよ.

[11] 複素数 $a = \sqrt{3} - i, b = \dfrac{-1+i}{2}, c = a^2 b$ とおく. a, b を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ. また c^n が正の実数になるような最小の自然数 n を求め, そのときの絶対値 $|c^n|$ を求めよ. 。

5.2 極限

[1] 次を示せ.

(1) $\lim_{n\to\infty} n\,a^n = 0 \quad (0 < a < 1) \quad [a = \dfrac{1}{1+h} \quad (h > 0)$ と置け] (2) $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$

[2] 次の極限を求めよ. (1) $\lim_{n\to 0}\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^n$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^n$

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ということは, どのように考えればよいか.

[4] 次の数列 $\{a_n\}$ は有界で単調であることを示し, 極限を求めよ. [単調増加・単調減少は a の値に依る.]

$$a_1 = a \geqq -\frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1} \quad (n \geqq 1).$$

[5] 定理「有界な単調数列は収束する」を用いて次を示せ.

(1) 極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ は収束する (この極限値が e である).

(2) 漸化式 $a_{n+1} = \sin a_n \ (n = 1, 2, \ldots),\ a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

[6] $0 < a < 1$ とする.

(1) $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ であることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ の値を求めよ. (まず $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ を求めよ.)

[7] 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$ (3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{5^x - 1}{x}$ (4) $\lim_{x\to +0} x(\log x)^2$

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^n$ (6) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ (7) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right)^n$ (8) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

(9) $\lim_{x\to +0}\sqrt{x}\log x$ (10) $\lim_{x\to 0}\ (\cos x)^{1/x^2}$ (11) $\lim_{x\to 0+} x^x$

[8] 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^2)-1}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\arcsin x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(\sqrt{x}\right)^x$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\exp\left(x\log\sqrt{x}\right)$

[9] 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

5.3 関数

[1] 次の値を求めよ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (3) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\cos^{-1}1$ (6) $\tan^{-1}(-1)$ (7) $\sin^{-1}\sin\dfrac{5}{6}\pi$ (8) $\cos^{-1}\sin\dfrac{\pi}{7}$

(9) $\cos^{-1}\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ (10) $\tan^{-1}\dfrac{1}{5}+\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ (11) $\tan^{-1}3-\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$

[2] 次の値を求めよ。

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\cos\dfrac{\pi}{5}$ (2) $\cos\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ (3) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)$ (5) $\mathrm{Sin}^{-1}\sin\dfrac{5}{6}\pi$

(6) $\tanh\left(\dfrac{\log 2}{2}\right)$ (7) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{5}\right)$ (8) $\sinh\left(\dfrac{\log 3}{2}\right)$ (9) $\mathrm{Cos}^{-1}\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$

[3] 関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ を考える.

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2) 曲線 $y=f(x)$ の 点 $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ における接線を求めよ.

(3) 次の条件を満たす x の値を求めよ： $\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{3}$

[4] (1) 方程式 $\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)+\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{-7}{9}\right)$ を満たす x をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)+\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{-7}{9}\right)$ を満たす x をすべて求めよ.

[5] $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を示せ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

[6] 次の極限を求めよ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ $(n\in\mathbf{N})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(2x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\,\sin\frac{1}{x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

[7] 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 次の公式を示せ. (i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(ii) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ (iii) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(iv) $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$

(2) (i) 関数 $y = \sinh x$ が $\mathbf{R}$ 上狭義単調増加であることを示せ.

(ii) 関数 $y = \sinh x$ には $\mathbf{R}$ 上定義される逆関数 $x = \sinh^{-1} y$ が存在し,

$$\sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

であることを示せ.

[8] (1) $x \in (-\infty, 0)$ の範囲で考える. 恒等式 $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ を利用して, $\cosh x$ を $\sinh x$ のみを含む数式で表せ. 同様に, $\sinh x$ を $\cosh x$ のみを含む数式で表せ.

(2) 関数 $\cosh x$ を全単射にするために, 定義域を $(-\infty, 0)$ に制限したものを $\mathrm{Cosh}\, x$ とあらわす. $f(x) = \mathrm{Cosh}^{-1} x$ と定める. このとき, 次のそれぞれに答えよ.

(i) $f(x)$ の定義域はどんな集合か？

(ii) $\mathrm{Cosh}\, x$ と $f(x)$ のグラフをかけ.

(iii) $f'(x)$ を求めて, グラフの概形を描け.

[9] 関数漸化式 $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で定義される関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. すなわち, $f_2(x) = x^x$, $f_3(x) = x^{x^x}$, $f_4(x) = x^{x^{x^x}}$, ... このとき,

$$\lim_{x \to +0} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (n\text{: 奇数}) \\ 1 & (n\text{: 偶数}) \end{cases}$$

であることを示せ.

[10] 次の命題を ϵ-δ 論法を用いて示せ.

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ならば $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$.

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ならば $\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \alpha\beta$.

[11] $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$ は連続関数であることを示せ.

5.4 微分

[1] 次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい (1 階微分をしなさい).

(1) $(x+2)^5(x - 2) - 5$ (2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (3) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(4) $x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ (5) $\log|\tan x|$ (6) $\mathrm{Sin}^{-1}(x^2)$

[2] $f(x) = \log(1-x^2)$ $(-1 < x < 1)$ とする．自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

[3] 次の不等式を示せ．　(1) $\cos x \geqq 1 - \dfrac{x^2}{2!}$　(2) $(2+x)\log(1+x) \geqq 2x \quad (x \geqq 0)$

[4] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} \sqrt{x}\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\tan x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x - 2^x}{x}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to 0}\frac{x\tan^{-1}x - \log(1+x^2)}{x^3}$

[5] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x) - \cosh(5x)}{(\sin x)\cdot(\sinh(7x))}$ を求めるときに, de l'Hôpital の定理を用いる手順を説明し, 極限値を求めよ．

[6] 次のそれぞれの関数のグラフの概形を (関数の増減, および $x \to 0$, $x \to \infty$ のときの極限値に注意して) 描け．

(1) $f(x) = x^{1/x} \quad (x > 0)$　(2) $g(x) = \tan^{-1}\dfrac{3}{x} - \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0)$

[7] 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ の増減, 凹凸, 極値および最大値, 最小値を調べよ．また, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

[8] 次の関数 $f(x)$ に対して, 第 n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$　(2) $f(x) = e^{3x+1}$　(3) $f(x) = \sin 2x$

(4) $f(x) = \cos^2 x$　(5) $f(x) = (x+1)\log(x+1)$　(6) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

(7) $f(x) = x^2 e^{-x}$　(8) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$

[9] 前問の関数のマクローリン展開を, 公式 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ を利用して計算せよ．

[10] 既知のマクローリン展開 (教科書参照) を利用して, 次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$　(2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$　(3) $f(x) = \log(\cos x)$

[11] 次の関数 $f(x)$ について, $x = 0$ のまわりでの 2 次のテイラー近似多項式, および 3 次の誤差項を求めよ．さらに, それを用いて $f(0.1)$ の近似値を求め, 真の値との誤差を評価せよ．

(1) $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$　(2) $f(x) = \cosh x$　(3) $f(x) = \tan(10x)$

[12] 関数 $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ の $x = 0$ における 3 次テイラー多項式を求めよ．ただし, テイラー多項式の係数は既約分数で書くこと．(例えば, $f(x) = e^x$ の $x = 0$ における 3 次テイラー多項式は $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$ である.)

[13] $f(x) = \cosh x$ にマクローリンの公式を適用せよ．

[14] 関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

このとき, $f(x)$ は $x = 0$ のまわりで C^∞ 級であるが, $x = 0$ のまわりで解析的でないことを示せ．

[15] xy 平面上で, 次のパラメータ表示を持つ曲線 C を考える:

$$C: \quad x = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big), \quad y = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\Big) \quad (t > 0)$$

(1) 曲線 C 上の点 $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ における接線を求めよ.

(2) 曲線 C の概形を描け.

[16] 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $x^{1/\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ (2) $x^{1/x^2} \quad (x > 0)$ (3) $\mathrm{Sin}^{-1} \cos x$ (4) $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$

(5) $\mathrm{Sin}^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big)$ (6) $\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$ (7) $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (-1 < x < 1)$

[17] 次の導関数を求めよ. ただし, n は任意の自然数とする.

(1) $\frac{d}{dx} \arctan \sqrt{x^2 - 1}$ (2) $\frac{d}{dx} \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ (3) $\frac{d}{dx} \log |\arctan x|$

(4) $\frac{d}{dx} \log(\log(\log x))$ (5) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \log(1-x)$

[18] 関数 $f(x) = xe^{1-x}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 極限 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 1 階, 2 階の導関数を求め, $f(x)$ の増減表を作成し, 凹凸・変曲点 に注意して, $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) $f(x)$ の 極値・最大値・最小値 を調べよ.

(4) $f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

[19] 次の極限値を求めよ. (1) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x - \log(1+x)}$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{x\mathrm{Tan}^{-1}x - \log(1+x^2)}{x^4}$

[20] 関数 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$ の 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

[21] $n \geq 1$ とする. 次の関数の n 次導関数 及び n 次 の マクローリン展開 を求めよ.

(1) $f(x) = e^x$ (2) $g(x) = \log(1+3x)$ (3) $h(x) = \cos^2 x$ (但し $n = 2m$ とする)

[22] 下の関数の $x = 1$ における, 6 次までを主要項とし, $o((x-1)^6)$ を剰余項とするテーラーの公式を求めよ.

(1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (2) $f(x) = \frac{e^{3x}e^{x^3}}{e^{3x^2}}$ (ヒント:関数を 1 つの指数関数にまとめてみよ)

[23] 語呂合わせで 2 の平方根を暗記する方法は, 「ヒトヨヒトヨニ $\cdots$」が有名である. この問題では, $x = 0$ を中心とした有限 Taylor 展開を使って, 2 の平方根を近似することを目的とする. $f(x) := (x+1)^{1/2}$ と置く. 下記の剰余項の記号で $R_n(x)$ とは, x^n という因子を持つ項である. 計算結果では, 9 とか 18 とか 27 とは書かずに, 3^2, $2 \cdot 3^2$, 3^3 などと書け. 分数べき, つまり $\frac{1}{2}$ 乗など, では因数分解は不要である.

(1) $f(x)$ の 3 次までの有限 Taylor 展開 (つまり剰余項が $R_4(x)$) を求めよ.

(2) 容易に確かめられる等式 $\sqrt{2} = \dfrac{7}{5f(\frac{-1}{50})}$ を利用するならば, $x = \frac{-1}{50}$ を剰余項に代入する必要がある. 誤差 $|R_4(\frac{-1}{50})|$ を評価せよ.

(ただし「誤差を評価する」という言葉の意味は, 剰余項の絶対値と, 変数・未知数は一切含まない数式との間の, 不等式を作ることである. $\frac{1}{50}$ のべき乗は, それ以上変形せずに, 結果の中に残せ. つまり, $\frac{1}{100}$ と書かずに, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50}$ と書けばよいのである.)

(3) $f(\frac{-1}{50})$ の近似値を, 筆算で小数第 7 位まで求めよ.

5.5　積分

[1] 有理式 $\dfrac{4}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$ を部分分数に分解せよ.

[2] 次の有理式を, 部分分数に分解せよ. ただし, 分母は, 実数係数の一次式または因数分解できない二次式であること. 分子は, 分母の次数より低い次数の式であること.

(1) $\dfrac{1}{6x^2-5x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{x^3+3x^2+x-5}$

[3] 部分積分法を用いて $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1} x\, dx$ を求めよ. (ヒント: $\displaystyle\int \log x\, dx$ の計算法)

[4] 次の不定積分を求めよ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x^2}$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$　(6) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$　(7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx$　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int |x|\, e^x\, dx$　(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$　(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$

(12) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\, dx$　(13) $\displaystyle\int x\, \sin^{-1} x\, dx$　(14) $\displaystyle\int x\, \tan^{-1} x\, dx$

(15) $\displaystyle\int x^2 \sinh 2x\, dx$　(16) $\displaystyle\int \log(\cosh x) \sinh x\, dx$

[5] 次の関数の原始関数を求めよ. (積分定数は, あってもなくても減点しない.)

(1) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$　(2) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$　(4) $\dfrac{1}{\cos x}$

[6] 不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x)^2}$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x)}$　(3) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-1}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2^2 \sin^2 x}$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\,dx$　(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$　(8) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

[7] (1) 次の不定積分を求めよ: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(2) (i) 有理式 $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x^2-x+1}$ の 部分分数展開 を求めよ.

(ii) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ.

[8] (1) 次の 定積分 及び 不定積分 を求めよ: (i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(2) (i) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき, $\cos x$ 及び dx を t を用いて表せ.

(ii) 次の 不定積分 を求めよ: $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

[9] 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-2x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}x\;dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x}$

[10] 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+5}{x^2-3x+5}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)\;dx$ (4) $\displaystyle\int x\,\mathrm{Tan}^{-1}x\;dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ (7) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}\;dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(5+3\cos x)}$

[11] 次の定積分を求めよ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) $\displaystyle\int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{x^{2/3}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ (5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-16}{x^2+3x-10}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2-3x+5}{x^2-2x+2}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ (9) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin^{-1}x\,dx$ (11) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \tan^{-1}x\,dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (14) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ (15) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x+\sin x}$

(16) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$ (17) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (18) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

[12] 次の定積分を求めよ:

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\log(1-x^2)\right)^2}\,dx$

[13] 次の微分を f を用いて表しなさい. ただし, (2) の 関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ を満たすとする.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt$ (2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)dt$ (3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x} f'(t)dt$

[14] 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$

(4) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a<b)$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

[(5) のヒント: $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.]

[15] 積分の値を求よ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{Arctan}x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\log(\cos x)dx$ (3) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3+x+1}{x^2-1}dx$

[16] m,n を正の整数とする. また, $I_{m,n} := \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) $I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m}I_{m+1,n-1}$ を示しなさい.

(2) $I_{m,n}=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$ を示しなさい.

(3) (1) の結果を用いて、$I_{2,2}, I_{2,3}$ を求めなさい.

(4) $I_{m,n}=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ を示しなさい.

[17] 次の広義積分を計算せよ. ただし (8) の a, b は定数で $a>0$ を満たすものとする.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^{-x}+1+e^x+e^{2x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x\log(\log x)}{x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$ (8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$

[18] 次の広義積分を求めよ:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$ (2) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

[19] 次の定積分（広義積分）を求めよ. (1) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$

[20] (1) 次の不定積分を求めよ: $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-\frac{1}{2}}}$ $\left(t=\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}\ \text{と置け}\right)$

(2) 次の 広義積分 を求めよ: $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\left(t=\sqrt{x^2-1}\ \text{と置け}\right)$

[21] 次の定積分（広義積分）を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ (α は定数) (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+1+e^x+e^{2x}}\,dx$

[22] a を正の定数とする. 次の広義積分が収束するための a に対する条件を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^a\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\log x)^2\sin(x^a)}\,dx$

[23] (1) $f(x)$ は $[0,\infty)$ 上連続かつ $(0,\infty)$ 上微分可能とする． さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|\,dx$ は収束するものとする．このとき，正の定数 a に対し，広義積分

$$I_a = \int_0^\infty f(x)\sin ax\,dx, \qquad J_a = \int_0^\infty f(x)\cos ax\,dx$$

はともに収束し，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} I_a = \lim_{a\to\infty} J_a = 0$ であることを示せ．

(2) a を正の定数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^a)\,dx$ が収束するような a の範囲を求めよ．

[24] (1) α は $0<\alpha<1$ を満たす定数とする．$n=0,1,2,3,\ldots$ に対して $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{(\log x)^n}{x^\alpha}\,dx$ とおく．変数変換 $x=e^{-t}$ により I_n を t に関する積分で表せ．また I_{n+1} を I_n で表す漸化式を求め，それを用いて I_3 を求めよ．

(2) a は正の定数とする。次の曲線の長さを求めよ． $\displaystyle y = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{6}$ $\Big(0 \leqq x \leqq a\Big)$

[25] (1) $n=1,2,3,\ldots$ に対して $\displaystyle I_n = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ とおく．変数変換 $x=\tan\theta$ を行い．I_{n+1} を I_n で表す式を求めよ．また，これを用いて I_3 を求めよ．

(2) 次の曲線の長さを求めよ． $y=\log(\cos x)$ $\Big(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\Big)$

[26] 次の曲線の長さを求めよ．

(1) パラメータ表示 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ で表される曲線．

(2) パラメータ表示 $x=\cos(t^2),\ y=\sin(t^2)$ $(0 \le t \le \sqrt{\pi})$ で表される曲線．

(3) 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ で表される曲線．

(4) 極方程式 $r=a\theta^2$ $(a>0,\ 0 \le \theta \le \sqrt{5})$ で表される曲線．

(5) 陰関数表示 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$ で表される曲線．

[27] $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられる曲線について答えよ．

(1) この曲線の概形をを描け．

(2) この曲線の長さを求めよ．

(3) この曲線と両軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

[28] 長さ 1 の棒があり，端から x $(0 \leqq x \leqq 1)$ の位置にある点における密度が $\rho(x)=1+x$ であるという．この棒の重心の位置を求めよ．

[29] 曲線 $\displaystyle y=\frac{x^2}{2}$ を考える．この曲線の $(0,0)$ から $(1,1/2)$ までの長さ L を求めたい．

(1) L を与える式を積分の形で書け．

(2) (1) で求めた式をルートのない式で表したい．うまく積分変数を変換して，ある三角関数の分数式（ある三角関数を X とすると，X の多項式分の多項式）の積分に直せ．

(3) (2) で求めた式について, 再度積分関数の変換を行い, 分数関数の積分に直せ.

(4) (3) の積分の被積分関数を部分分数に展開せよ.

(5) L の値を求めよ.

[30] $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,\,q>0)$ について,

(1) $B(p+1,q)=\dfrac{p}{q}B(p,q+1)$ を示せ.

(2) $p,\,q$ が正の整数のとき, $B(p,q)=\dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ を示せ.

[31] この問題の目的は, 「微積分学の基本定理」(定理 3.1.1) と「連続関数の定積分の存在」(定理 3.4.1) の重要性を知ることである. この問題では, 教科書の基本事項と $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dx}{x}=\infty$ は証明なしに利用してよいが, 指数法則・対数法則を利用するときは証明が必要だとする.

$(0,\infty)$ を定義域とする実数値関数 $L(x)$ を $L(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ で定義する. $\dfrac{1}{x}$ は $(0,\infty)$ で連続なので, 定理 3.4.1 より $L(x)$ は存在し, 定理 3.1.1 より $L'(x)=\dfrac{1}{x}$ が従うのである.

(1) 任意の $a,b\in(0,\infty)$ に対し, $L(ab)=L(a)+L(b)$ および $L\left(\dfrac{1}{a}\right)=-L(a)$ を示せ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}L(x)$ を求めよ.

(2) 任意の実数 y に対し, $y=L(x)$ となる $x\in(0,\infty)$ がただひとつ存在することを示せ.

ヒント「中間値の定理」(定理 1.2.4) は存在証明に利用できる.

(3) $L(x)$ の逆関数を $E(y)$ で表す. つまりこれは, 実数全体の集合を定義域とし, 値は正の実数すべてを取り得る関数である. このとき, 任意の実数 c,d に対し, $E(c+d)=E(c)E(d)$ が成り立つことを証明せよ.

(4) 「逆関数の微分」(定理 2.1.5) を利用して, $E'(y)$ を求めよ.

(5) 適切な x での $L'(x)$ の値を利用することにより, $L\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=1$ を示せ.

5.6 連立 1 次方程式

[1] 次の連立 1 次方程式を解け. ただし, はき出し法を用い, その手順を省略せずに記すこと.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

[2] 次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

[3] 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] 次の行列の階数を求めよ. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & a & -4 \end{pmatrix}$

[5] 次の連立 1 次方程式が解を持つように定数 a の値を定めて方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = a \end{cases}$$

[6] クラメルの公式を用いて次の連立一次方程式の解を求めなさい.

$$(1)\quad \begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 8x + 3y = 14 \end{cases}$$

5.7 行列式

[1] 順列 $n, 2, 3, 4, \ldots, n-1, 1$ の逆転対の個数, および符号を求めよ.

[2] 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} \qquad (3)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$$

(z は $z^3 = -1, z \neq -1$ を満たす複素数である.)

$$(4)\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \qquad (5)\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \qquad (6)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (7)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

[3] 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

[4] $a(x), b(x), c(x), d(x)$ はすべて微分可能とする. $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$ とおくとき,

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

であることを示せ.

[5] 次の連立一次方程式が解を持つ様に定数 a の値を定めて, これを解け.

$$\begin{cases} 2x + y - z - 5w = 0 \\ x - z - 2w = -1 \\ 5x + y - 4z - 11w = a \\ 4x + y - 3z - 9w = -2 \end{cases}$$

5.8　応用

[1] 次の定理が知られている.

項別積分定理. 関数 $f(x)$ のマクローリン展開が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

で与えられ, 右辺の級数が $|x| < r$ で収束すると仮定する. このとき, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ のマクローリン展開は

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

で与えられ, 右辺の級数は $|x| < r$ で収束する.

これを利用して, 次の関数のマクローリン展開を求めよ. 但し, 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) $F(x) = \log(1+x)$　　(2) $F(x) = \tan^{-1} x$　　(3) $F(x) = \sin^{-1} x$

[2] 逆三角関数は主値をとるものとする.

(1) 実数 u, v が $|\tan^{-1} u + \tan^{-1} v| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき, 公式

$$\tan^{-1} u + \tan^{-1} v = \tan^{-1}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) ジョン・マチン (John Machin) の公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

を示せ.

(3) マチンの公式と前問 (2) で得られた $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開を利用して, π の値を小数第 5 位まで求めよ. ただし, 誤差は評価しなくてもよい.

[3] n を自然数とし, $f(x)$ は開区間 I 上の C^n 級関数とする. このとき, テイラーの定理

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a,\ x \in I)$$

における剰余項 $R_n(x)$ は次の積分で表せることを数学的帰納法を用いて示せ.

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

[4] $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$ に対し, $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ を Legendre (ルジャンドル) 多項式という.

(1) $k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$ に対して $f_{n,k}(x)=\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n$ とおくとき, $f_{n,k}(-1)=f_{n,k}(1)=0$ を示せ.

(2) $k=0,\,1,\,\ldots,\,n$ に対し, $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx$ を求めよ.

(3) $0\le m\le n$ なる整数 $m,\,n$ に対し, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx$ を求めよ.

[5] (1) 次の等式を示せ:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n\text{: 偶数})\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{: 奇数})\end{cases}\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

但し, $n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & (n\text{: 偶数})\\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & (n\text{: 奇数})\end{cases}\quad (n=1,2,3,\cdots),\qquad 0!!=(-1)!!=1.$

(2) (1) と不等式 $1\ge\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\ge\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ を利用して, Wallis (ウォリス) の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を示せ.

(3) 自然数 n に対し, 次の不等式を示せ.

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx<\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx<\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx<\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

(4) (2), (3) の結果を利用して, 次の Gauss (ガウス) 積分の公式を示せ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6．数学演習 II

6.1　偏微分

[1] 次の関数 $f(x,y)$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$　(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(3) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}$

(4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy+(x-y)^2}$　(5) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

[2] 次の関数 $f(x,y)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$ および $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$　(2) $f(x,y) = \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$　(3) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Sin}^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

[3] (1) 部分集合 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ が**開集合**であることの定義を述べよ.

(2) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で**全微分可能**であるということの定義を述べよ.

[4] 関数 $f(x,y) = \dfrac{(x^2-y^3)(x+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}$ のとき，$f_x(1,1)$ と $f_y(1,1)$ を求めなさい.

[5] $h(\theta) = f(\sin\theta, \cos\theta)$ のとき，$h'(\theta)$ を f_x, f_y を用いて表しなさい.

[6] 合成関数の微分を用いて z_u, z_v を求めよ.　$z = f(x,y)$,　$x = \cos(u+v)$,　$y = \sin(u-v)$

[7] 2 変数 x, y の関数 z は $z = F(x^{-1}y)$ で与えられている. ただし, F は何回でも微分可能な 1 変数関数である. このとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ が成り立つことを示せ.

[8] 次の関数 $z = f(x,y)$ の 2 次の偏導関数 z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy} を求めなさい.

(1) $z = x^2 + xy^3 + y^5 + 4$　(2) $z = (x+y)\cos(x+y)$　(3) $z = (x+y)e^y$

(4) $z = \mathrm{Tan}^{-1}(x+y)$　(5) $z = \mathrm{Tan}^{-1}(x-y)$　(6) $z = \mathrm{Sin}^{-1}(2x+2y)$

[9] (1) 次の関数のラプラシアン $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ を求めなさい.

(i) $z = \sin(xy)$　(ii) $z = \tan^{-1}(xy)$　(iii) $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(2) 関数 $z = \log(x^2+y^2)$ にラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を作用させよ.

[10] $z = f(x,y)$,　$x = r\cos\theta$,　$y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示しなさい. ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とする.

(1) $z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$, $z_\theta = z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta)$

(2) $(r\cos 2\theta)z_r - (\sin 2\theta)z_\theta = xz_x - yz_y$

(3) $z_{rr} = z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta$

$z_{\theta\theta} = z_{xx}(-r\sin\theta)^2 + z_{xy}(-2r^2\cos\theta\sin\theta)z_{yy}(r\cos\theta)^2 + z_x(-r\cos\theta) + z_y(-r\sin\theta)$

(4) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = z_{xx} + z_{yy}$

[11] (1) $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ. $z_{xx}+z_{yy} = z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$

(2) $z_{xx} + z_{yy} = 0$ を満たす $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ という形の関数をすべて求めよ.

[12] $w = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ のとき， (1) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2$, (2) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ を求めよ.

[13] $f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ のとき， (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$, (2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

[14] 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ. (1) $x = 2u+v$, $y = 5u+2v$ (2) $x = u\cosh v$, $y = u\sinh v$

[15] 次のヤコビ行列式を求めよ.

(1) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$: $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ (2) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$: $\begin{cases} x = \dfrac{r}{\cos\theta} \\ y = r\tan\theta \end{cases}$

(3) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$: $x = vw$, $y = wu$, $z = uv$ (4) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}$: $\begin{cases} x = s+t+u \\ y = tu+us+st \\ z = stu \end{cases}$

[16] 関数 $f(x,y) = \cos(x+2y)$ に $n = 2$ としてマクローリンの定理を適用せよ.

[17] 次の関数をマクローリン展開しなさい.

(1) $\dfrac{1}{1+x^2-y^2}$ (2) e^{x^2-y} (3) $\sin(x+2y)$ (4) $\dfrac{1}{1+2x^2+2y^2}$ (5) $(2x+3y)e^{x+y}$

[18] 関数 $z = f(x,y)$ は $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$ を満たすとする. $\mathrm{P}(a,b)$ を xy 平面の一点とし, $c = f(a,b)$ とおく. xy 平面の曲線 $C: f(x,y) = c$ について, 次を示せ.

(1) 点 P における 曲線 C の接線の方程式は $f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0.$

(2) 点 P における 曲線 C の (一つの) 法線ベクトルは $(f_x(a,b), f_y(a,b)).$

[19] 次の方程式は与えられた点 $P(a,b)$ の近くで陰関数 $y = \varphi(x)$ を持つことを示し，$\varphi'(x), \varphi'(a)$ を求めよ.

(1) $x^3 + 3xy + y^5 - x + 1 = 0,$ $P(2,-1)$

(2) $\cos x + 2y\cos xy + 2x\cos y - \pi = 0,$ $P(\pi/2, 0)$

[20] 次の関係式 $F(x,y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ に対して，その導関数 $\varphi'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(1) $x^3+3x^2y+2xy^2+3y^2-4 = 0$ (2) $x+y-e^{xy} = 0$ (3) $2x+y-e^y = 0$ (4) $\log(x^2+y^2) - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

6.2 極値問題，最大・最小値問題

[1] (1) 2 変数関数 $f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$ が点 $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ で, 極値をとるか否か, 極値をとるならば極大であるか, 極小であるかを判定せよ.

(2) 関数 $z=x^4+y^4-x^2+2xy-y^2$ は点 $P(1,-1)$ で極値をとるかどうか調べよ.

[2] 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ (極大・極小も判定すること).

(1) $f(x,y)=x^3+x^2+xy^2-y^2$ (2) $f(x,y)=x^2-2y^2+y^4$ (3) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$

(4) $f(x,y)=(x-y)^2+y^4$ (5) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$ (6) $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

[3] 次の関数 $f(x,y)$ の停留点と極値を求めなさい.

(1) $f(x,y)=x^3-3x^2+y^2$ (2) $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ (3) $f(x,y)=xy(x^2+y^2-1)$

(4) $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2+2y$ (5) $f(x,y)=xy(x^2+2y^2-1)$

Hint: 停留点の数は (1) 2 個, (2) 3 個, (3) 9 個となる.

[4] 与えられた条件の下で，関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.（なるべくたくさんの別解を考えてみてください）

(1) $f(x,y)=y-x$, 条件: $x^2+y^2=2$ (2) $f(x,y)=xy$, 条件: $x^2+2y^2=1$

[5] ラグランジュの未定乗数法を用いて，条件 $x^2+xy+y^2-1=0$ の下での関数 x^2+y^2 の極値候補を全て求めなさい（極値の判定は不要）.

[6] 次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ に対して，条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の最大値，最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めなさい.

(1) $f(x,y)=-x+y$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$ (2) $f(x,y)=2xy$, $g(x,y)=x^2+y^2-2$

(3) $f(x,y)=xy$, $g(x,y)=x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-2$ (4) $f(x,y)=x^3+y^3$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$

(5) $f(x,y)=xy$, $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1$

[7] (1) $x^2+y^2\leqq 1$ の範囲で, 関数 $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$ の最大値・最小値を求めよ.

(2) $x^2+y^2\leqq 4$ の範囲で, 関数 $g(x,y)=x^2+y^2+2x$ の最大値・最小値を求めよ.

[8] $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ の $D=\{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\,\}$ での最大・最小値を,
「2 変数関数の極値を求める方法」と「ラグランジュの未定乗数法」を用いて求めなさい.

6.3 微分方程式

[1] 次の微分方程式を解け. (1) $\dfrac{dy}{dx}+x^3y^2=0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{4}y=0$

[2] 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ (2) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^3$ (3) $y' + 2xy = 2x^3y^3$

(4) $(x^3 + 5xy^2)dx + (5x^2y + 2y^3)dy = 0$ (5) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$

[3] 微分方程式 $e^x\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0$ の解で, $x = 0$ のとき $y = \dfrac{1}{2}$ となるものを求めよ.

[4] 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \sin y$ について次の問いに答えよ.

(1) 定数解を求めよ. (2) 初期条件「$x = 0$ のとき $y = \pi/2$」を満たす解を求めよ.

[5] C を任意定数とするとき，C を消去し，次の関数族が満たす微分方程式を求めなさい.

(1) $y = Cx^3$ (2) $x^2 - y^2 = Cxy$

[6] (1) 次の微分方程式を，(i) 変数分離形として，(ii) 定数変化法を用いて，の 2 通りで解きなさい.

$$y' + xy = x$$

(2) 次の微分方程式を，(i) 同次形として，(ii) 完全微分形として，の 2 通りで解きなさい.

$$y' = -\frac{x + 3y}{3x + y}$$

[7] 次の微分方程式を解け. (1) $y' = -3y$ (2) $y' + y = e^x$ (3) $y' + \dfrac{y}{x} = 0$

[8] 次の常微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めなさい.

(1) $y' = 2xe^{-y}$ (2) $y' = -\dfrac{x^n}{y}$ $(n \in \mathbf{N})$ (3) $(1 + x)y + (1 - y)xy' = 0$

(4) $y' = \sin x \tan y$ (5) $y' + y = e^{-x}$ (6) $y' - 2y = e^x + x$

(7) $xy' = x + 2y$ (8) $(xy - x^2)y' = y^2$ (9) $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(10) $(1 + x^2)y' + xy = -\sqrt{1 + x^2}$

[9] $f(x)$, $g(x)$ が微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解であれば，$C_1f(x) + C_2g(x)$ もこの微分方程式の解であることを示しなさい.

[10] 次の微分方程式を解け.

(1) $y'' = 7y$ (2) $y'' = -6y$ (3) $y'' - 2y' + y = 0$

(4) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (5) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (6) $y'' - 6y' + 10y = 0$

[11] 次の常微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めなさい.

(1) $y'' + 2y' + y = 0$ (2) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (3) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(4) $y'' + 2y' + y = e^x$ (5) $y'' + 4y' + 4y = x$ (6) $y'' + 5y' + 6y = \cos x$

(7) $y'' + 2y' + y = (x + 1)e^{-x}$ (8) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ (9) $y'' + 2y' - 3y = \sin x$

(10) $y'' - y' - 2y = 3e^{-x} - 4x$ (11) $y'' - 2y' + y = (6x + 4)e^x$

[12] 次の常微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めなさい．ただし，$y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とする．

(1) $y^{(3)} - y^{(2)} + 2y = 0$　　(2) $y^{(3)} - y^{(2)} + 2y = x$　　(3) $y''' + y'' - y' - y = x^2 + 1$

[13] 微分方程式 $y'' - 6y' + 8y = 6x - 18x^2 + 8x^3$ について次の問いに答えよ．

(1) $y_0 = x^n$ が上の微分方程式の解となるような 自然数 n の値を定めよ．

(2) 上の微分方程式を解け．

[14] (1) (i) $y = x$ と $y = x\log x$ は $x^2y'' - xy' + y = 0$ の基本解であることを示せ．

(ii) 非同次線形微分方程式 $x^2y'' - xy' + y = x^2$ を解け．

(2) (i) $y = x + 1$ と $y = e^x$ は $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ の基本解であることを示せ．

(ii) 非同次線形微分方程式 $xy'' - (x+1)y' + y = (x-1)e^x$ を解け．

[15] 次のリッカチ型の微分方程式を考える．

$$y' = xy^2 + xy - \frac{3}{4}x \tag{6.1}$$

(1) $y(x) = \dfrac{1}{2}$ が解であることを示しなさい．

(2) $y = \dfrac{1}{2} + u$ と変数変換をすると，(6.1) は次のベルヌーイ型の微分方程式になることを示しなさい．

$$u' - 2xu = xu^2 \tag{6.2}$$

(3) $v = u^{-1}$ と変数変換をすると，(6.2) は次の 1 階の微分方程式になることを示しなさい．

$$v' + 2xv = -x \tag{6.3}$$

(4) リッカチ型の微分方程式 (6.1) の一般解を求めなさい．

[16] 次のリッカチ型の微分方程式を考える．

$$y' = (y-1)\left(\frac{x}{x-1} - y\right) \tag{6.4}$$

(1) $y(x) = 1$ が解であることを示しなさい．

(2) $y = 1 + u$ と変数変換をすると，(6.4) は次のベルヌーイ型の微分方程式になることを示しなさい．

$$u' - \frac{u}{x-1} = -u^2 \tag{6.5}$$

(3) $v = u^{-1}$ と変数変換をすると，(6.5) は次の 1 階の微分方程式になることを示しなさい．

$$v' + \frac{v}{x-1} = 1 \tag{6.6}$$

(4) リッカチ型の微分方程式 (6.4) の一般解を求めなさい．

6.4 一次独立・基底

[1] $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について, 次の 外積 及び 内積 を計算せよ.

(1) $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \times \vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$　　(2) $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma})$, $(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\alpha})$, $(\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}, \vec{\beta})$

(3) $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$, $(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\alpha}$, $(\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\beta}$

$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$, $\vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha})$, $\vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$

[2] 次の 3 つのベクトルは, 一次独立・一次従属 どちらであるか示せ. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

[3] 4 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が一次独立であるとする. 次の 4 つのベクトル が 一次独立・一次従属 どちらであるか示せ.

(1) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{d} + \vec{a}$

(2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}$, $\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}$

[4] 次の 4 つのベクトルは $\mathbf{R}^4$ の基底となるか判定せよ.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix}$$

6.5 固有値・固有ベクトル

[1] (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ.　(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

[2] 次の行列 A, B はいずれも固有値 2 を持つことがわかっている. 固有値 2 に対する固有空間を求めよ. ただし, 連立 1 次方程式を解く場合は, はき出し法を正しい手順で最終まで行い, その手順を省略せずに記すこと.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[3] 次の行列を対角化せよ.　(1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 2 \\ -1 & 9 & -1 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

[4] $\mathbf{R}^3$ の次の部分集合 W が線形部分空間になるか判定しなさい.

(1) $W = \{ {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$　　(2) $W = \{ {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz \geq 0 \}$

6.6 対称行列・直交行列

[1] 実対称行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい.

(1) M の固有値を求めなさい.

(2) (1) の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 M を対角化する直交行列 T を求めなさい.

(4) 直交行列 T の逆行列 T^{-1} を求めなさい.

(5) $T^{-1}MT$ を計算しなさい.

[2] (1) 3 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め, 直交行列 P で A を対角化するものを求めよ. (3 次正方行列 P で, その転置行列を ${}^tP$ とするとき, ${}^tPP = E$ (単位行列) であり, ${}^tPAP$ が対角行列であるようなものを求める.)

(2) 3 次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め, 直交行列 P で B を対角化するものを求めよ.

(注意) 上の A と B は $AB = BA$ を満たしている.

7. 解析学 I

7.1 重積分

[1] 関数 $f(x,y)$ を xy 平面内の領域 K 上で積分したものが $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ で与えられるとする. 以下の問に答えよ. ((1), (2) は答のみでよい.)

(1) 領域 K を図示せよ.

(2) 定積分 I を, 最初に x, 次に y で積分する累次積分で表せ.

(3) $f(x,y) = e^{y^2}$ のとき, (2) の結果を用いて I の値を求めよ.

[2] 次の累次積分の積分順序を交換せよ. $\displaystyle\int_0^2 \left\{ \int_0^{2x-x^2} f(x,y)\,dy \right\} dx$

[3] 次の定積分 I を極座標変換により書き改め, その値を求めよ. ただし a は正の定数である.

$$I = \iint_K x\,dxdy, \qquad K = \{\,(x,y) \mid y \geq x,\ x^2+y^2 \leq a^2\,\}$$

[4] 次の重積分および累次積分の値を求め, 累次積分については順序交換も行え.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\,dxdy \qquad D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 2 \leq y \leq 3\,\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dxdy \qquad D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq x \leq 9,\ 0 \leq y < x\,\}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_0^x \frac{y}{x}\,dy$ (4) $\displaystyle\int_0^\infty dy \int_y^\infty e^{-x^2}\,dx$

[5] 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0} x^2 y\,dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{0<x\leq y\leq 1} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dxdy$

(3) $\displaystyle\iint_{-1<x+y\leq 1,\ 0\leq x-y\leq 1} \frac{x-y}{\sqrt{1+x+y}}\,dxdy$

[6] 次の積分を計算せよ. 広義積分は D の近似列を明らかにせよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy \qquad D = \{\,0 \leq y \leq 1-|x-1|\,\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (2x^2+3y^2)\,dxdy \qquad D = \{\,(x-1)^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\,\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)^a\,dxdy \qquad D = \{\,0 \leq y < x \leq 1\,\}$ (a は定数, $-1 < a < 0$)

(4) $\displaystyle\iint_D x\cos\left(\frac{y}{x}\right) dxdy \qquad D = \left\{\,0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}x\,\right\}$

[7] 次の (広義) 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$ 　　D は $y=x,\ y=\dfrac{1}{5}x,\ y=1$ で囲まれた領域

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy$ 　　$D=\{(x,y);\ 0\leqq x,\ y\,,x+y\leqq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ 　　$D=\{(x,y);\ 0\leqq y\leqq x\}$

[8] 次の重積分および累次積分の値を求め, 累次積分については順序交換も行え. ただし, a は正定数とする.

(1) $\displaystyle I_1=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$ 　　$D=\big\{(x,y)\ \big|\ x^2+y^2\leq a^2\big\}$

(2) $\displaystyle I_2=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x+y}}\,dxdy$ 　　$D=\big\{(x,y)\ \big|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 3\big\}$

(3) $\displaystyle I_3=\int_0^{\pi} dx\int_x^{\frac{x+\pi}{2}} \sin y\,dy$

(4) $\displaystyle I_4=\int_0^{a} dx\int_x^{a} e^{y^2}\,dy$

[9] 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \cos(x-y)dxdy$ 　　$D=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq x\leq \pi/2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$ 　　$D=\{(x,y)\mid 0\leq x+3y\leq 1,\ 0\leq -3x+y\leq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D y\log(x^2+y^2)dxdy$ 　　$D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\}$

[10] 平面領域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ に対する近似列

$$D_n=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\leq n^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}\quad (n=1,2,\ldots)$$

を用いて, 広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2}dxdy$ を求めよ.

[11] 次の重積分および累次積分の値を求め, 累次積分については順序交換も行え. ただし，a は正定数とする.

(1) $\displaystyle I_1=\iint_D (1+xy^3)\,dxdy$ 　　$D=\big\{(x,y)\ \big|\ 0\leq y\leq x\leq a\big\}$

(2) $\displaystyle I_2=\iint_D e^{x^2}\,dxdy$ 　　D は (1) と同じ

(3) $\displaystyle I_3=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$ 　　$D=\big\{(x,y)\ \big|\ 1\leq \sqrt{x^2+y^2}\leq 3\big\}$

(4) $\displaystyle I_4=\int_1^{4} dy\int_1^{y} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx$

(5) $\displaystyle I_5=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{y+2} y\,dx$

[12] 平面内の領域 $D_n,\ D$ を

$$D_n=\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq n, 1\leqq y\leqq n\}\quad (n=2,3,4,\cdots),\qquad D=\{(x,y)\mid 1\leqq x, 1\leqq y\}$$

と定める．$f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^3}$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) (i) 領域 D_n を図示せよ. (ii) 領域 D を図示せよ.

(3) (i) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ. (ii) 広義積分 $\displaystyle\iint_{D} f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ.

7.2 体積・曲面積

[1] $a>0$ とする. 2 つの円柱 $x^2+y^2\le a^2$ と $x^2+z^2\le a^2$ の共通部分の中で $x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0$ の部分を V で表す.

(1) V を図示せよ. (2) V の体積を求めよ. (3) 重積分 $\displaystyle\iiint_V z^2\,dxdydz$ の値を求めよ.

[2] $a>0$ とする. 上半球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2,\, z\ge 0$ と円柱 $x^2+y^2\le ax$ の共通部分 V を考える.

(1) V を図示せよ.

(2) xy 平面において, 領域 $D\colon x^2+y^2\le ax,\ y\ge 0$ を図示し, 次に, 平面の極座標の下で D に対応する (r,θ) 平面の領域 E を図示せよ.

(3) V の体積を求めよ.

[3] $a,\, b,\, c>0$ とする. 領域 $V\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1,\, z\ge 0$ において, 密度 ρ は 一定 であるとする.

(1) 変数変換 $(x,y,z)=(au,bv,cw)$ のヤコビアン J を求めよ.

(2) V の 質量 M を求めよ. 注) $M=\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz.$

(3) V の 重心 $\boldsymbol{\overline{x}}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ を求めよ. 注) $\overline{x}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\,x\,dxdydz$, etc.

[4] 立体 $D=\{\,(x,y,z)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\,\}$ の体積および重心を求めよ.

[5] 重積分を用いて次を計算せよ. ただし $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le r^2} dxdy=\pi r^2$ は既知としてよい.

(1) 関数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\le 1)$ と xy 平面とで囲まれる円錐の体積と表面積.

(2) 半球 $x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$ と半円柱 $x^2+y^2\le x,\ y\ge 0$ との共通部分の体積.

[6] 次の立体 D の質量 M および重心の z 座標 $\overline{z}$ を求めよ. ただし, 質量密度関数は $\rho(x,y,z)=1$ とする.

$$D=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;|x|\leqq 1,\,|y|\leqq 1,\,0\leqq z\leqq 2+xy\right\}$$

[7] 曲面 $F\colon z=xy$ $(x^2+y^2\le 3)$ の曲面積を求めよ.

[8] xyz 空間の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ で条件 $0\leqq\sqrt{3}x\leqq y$ を満たす部分の表面積を求めよ。

[9] (1) xy 平面内の領域 K で定義された 2 変数関数 $z=f(x,y)$ (偏微分可能で偏導関数は連続とする) のグラフを S とする. S の曲面積を K 上の 2 重積分として与える公式を記せ. (答のみでよい.)

(2) xyz 空間内で, 原点を中心とし半径 1 の球面の内, $z\ge h$ をみたす部分を S とする. S の表面積を (1) の公式を用いて求める場合, 領域 K を求め, 図示せよ. ただし, h は $0<h<1$ なる定数である.

[10] 次の曲面の曲面積を求めよ.

(1) $S: z = x + 2y^{3/2} \quad ((x,y) \in D) \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

(2) $F: z = \sqrt{1-x^2} \quad \big((x,y) \in D\big) \qquad D = \big\{(x,y) \bigm| x \geqq 0, y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1\big\}$

(3) $F: z = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in D\big) \qquad D = \big\{(x,y) \bigm| x^2 + y^2 \leqq 1\big\}$

[11] 曲線 $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ を x 軸のまわりに回転した図形の曲面積を求めよ.

7.3 線積分・面積分

[1] xyz 空間内の曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \big\{(x-y)\,dx - y\,dy + (x+y)\,dz\big\}$ の値を次の各場合について求めよ.

(1) C: 折線 $(1,0,1) \longrightarrow (-1,0,1) \longrightarrow (-1,0,-1)$

(2) C: 折線 $(1,0,1) \longrightarrow (1,0,-1) \longrightarrow (-1,0,-1)$

(3) C: $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = 0 \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

[2] a は正の定数とし, C_0 を xy 平面内の, 原点を中心とし半径 a の円で, 向きは反時計回りとする.

$$I_0 = \int_{C_0} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

とおく.

(1) I_0 の値を求めよ.

(2) C を xy 平面内のなめらかな (自分自身と交わらない) 閉曲線とする. また, その向きは反時計回り (内部を左側に見る向き) とする.

$$I = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

とおく. このとき次を示せ. (ヒント: グリーンの定理)

(i) 原点が C の外部にある場合, $I = 0$.

(ii) 原点が C の内部にある場合, $I = I_0$.

[3] 頂点が $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ の正方形の周 C に対して

$$\int_C ydx + x^2dy$$

をグリーンの定理 (ストークスの定理) を用いて計算せよ. ただし単純閉曲線 C は, それが囲む正方形 D を左手に見るように向きづける.

[4] (1) 次の曲線 C_1, C_2 に沿って線積分 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$ を計算せよ.

(i) $C_1: x = t,\ y = t^2 \quad (0 \le t \le 1)$ (ii) C_2: 2 点 $(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ直線

(2) C_1 と C_2 が囲む領域 D を図示し, これら 2 つの線積分が等しいことを Green の公式を用いて説明せよ.

[5] 閉曲線 C は半円 $x^2+y^2 \leqq 1,\, y \geqq 0$ の境界である。ただし C は左回りに向きづけられている。次の線積分を計算せよ。

$$\int_C y\,dx + x^2 y\,dy$$

[6] 次の各場合について, xy 平面上の閉曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(1) $C\colon x = t^2 - t,\ \ y = 2t^3 - 3t^2 + t \quad (0 \le t \le 1)$

(2) $C\colon (x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2,\quad x \ge 0,\ \ y \ge 0$

[7] 閉曲面 $F\colon x^2+y^2+z^2=1$ に沿う面積分 $\displaystyle\iint_F \big(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy\big)$ の値を求めよ. ただし, F の向きは外向き法線ベクトルが表側にあるように定める.

[8] S を半球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\, z \geqq 0$ の境界からなる閉曲面とするとする. S の法線ベクトルは外向きに与えられている. 次の面積分を計算せよ.

$$\iint_S x^2\,dydz + y^2\,dxdz + z^2\,dxdy$$

[9] 球面 $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$ に関して, 以下の問に答えよ. 但し, S は外側を表とする.

(1) S の極座標によるパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta,\varphi)$, 及び, 面積素 dS のこのパラメータ表示に関する表示を記せ.

(2) S の面積を求めよ.

(3) S 上の点 $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ における S の正の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) 面積分 $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ. 但し, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3},\ \ r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である.

(5) ガウスの発散定理を用いて, 面積分 $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ. 但し, $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ である.

[10] 関数 $f(x,y) = xy$ について, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ のグラフ S を描け.

(2) S の正のパラメータ表示 $\boldsymbol{x}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ について, 次の量を求めよ:

$$\text{ベクトル}\ \ \boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x},\ \ \boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}, \qquad \text{外積}\ \ \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \qquad \text{面積素}\ \ dS = \|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|\,dxdy.$$

(3) 単位円板 $D\colon x^2+y^2 \le 1$ 上での関数 $f(x,y)$ のグラフ S_1 の面積を求めよ.

(4) 領域 $E = [0,1]\times[0,1]$ 上での関数 $f(x,y)$ のグラフ S_2 に対して, 面積分 $\displaystyle\int_{S_2} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ. 但し, $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (-x,-y,z)$ である.

[11] (1) 長方形領域 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数 $f(x,y)$ の重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の定義を正確に述べよ.

(2) ガウスの発散定理の内容を正確に述べよ.

(3) 空間における流体の流れを考える. $\boldsymbol{v}$ をこの流れの時刻 t での速度ベクトル場とする (つまり, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は, 点 $\boldsymbol{x}$ における時刻 t での流れの速度ベクトル). S を空間の中の向き付けられた曲面とし, Δt を微小時間とするとき,

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle \cdot \Delta t \doteqdot \text{時刻 } t \text{ から } t+\Delta t \text{ の間に } S \text{ を表側に通過する流体の体積}$$

となることを, 曲面に沿うベクトル場の面積分の定義に基づいて (図も用いて) 説明せよ.

[12] xy 平面内の曲線 C に沿った線積分 $I = \displaystyle\int_C \big\{(x - \cos \pi y)\, dx + xy^2\, dy\big\}$ の値を次の各場合について求めよ.

(1) C : 折線 $(0,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (1,1)$

(2) C : 折線 $(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (1,1)$

(3) C : 線分 $(0,0) \longrightarrow (1,1)$

[13] xy 平面上の閉曲線　$C:\ x = t^3 - t,\ \ y = 1 - t^2 \ \ (-1 \leq t \leq 1)$　で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

[14] 関数 $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ を考える.

(1) ϵ を正の定数とし, $C_\epsilon : (x,y) = (\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta) \ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおく.

$$\int_{C_\epsilon} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

を求めよ.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき, $Q_x(x,y) - P_y(x,y)$ を求めよ.

(3) 領域 Ω はその内部に原点を含み, Ω の境界 $\partial\Omega$ は C^1 級閉曲線であるとする. このとき, Ω から $B_\epsilon = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \epsilon\}$ を除いた領域にグリーンの定理を用いることにより, 線積分

$$\int_{\partial\Omega} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

を求めよ. ただし, 積分路は Ω の内部を左側に見て回る向きに取る.

[15] 次の各場合について, xy 平面上の閉曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(1) $C:\ x = \pi^2 - t^2,\ \ y = \sin t \ \ (-\pi \leq t \leq \pi)$

(2) $C:\ (x^2+y^2)^3 = y^4,\ \ y \geq 0$

[16] xyz 空間内の曲線 C に沿った線積分 $I = \displaystyle\int_C \big(yz\, dx + e^x\, dy + zx\, dz\big)$ の値を次の各場合について求めよ.

(1) C : 折線 $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$

(2) C : 折線 $(0,0,0) \longrightarrow (0,1,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$

(3) C : 線分 $(0,0,0) \longrightarrow (0,0,1) \longrightarrow (0,1,1) \longrightarrow (1,1,1)$

[17] xy 平面内の曲線 $C:\ y=\sqrt{1-x^2}\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 1\right)$ を考える．C の長さ L と C の重心 $(\overline{x},\overline{y})$ を求めよ．ただし，密度は一定値 1 とする．以下では，C を xyz 空間内の曲線と見なす．C を x 軸の回りに回転して出来る回転面 F_1 の面積 S_1 と y 軸の回りに回転して出来る回転面 F_2 の面積 S_2 をそれぞれ求めよ．また，C の x 軸に関する慣性モーメント I_x と y 軸に関する慣性モーメント I_y をそれぞれ求めよ．

[18] (1) 極座標で表示された曲線 $r=f(\theta)\ \ (\alpha\leqq\theta\leqq\beta),\ \ \theta=\alpha,\ \ \theta=\beta$ で囲まれる図形 D の面積 $S(D)$ が，次のように表されることを示せ.

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)^2d\theta$$

(2) 曲線 $r=\sin\theta$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

[19] 領域 D の面積 $S(D)$ は次のように表されることを示せ.

$$S(D)=\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy-ydx)$$

[20] アステロイド $x=x(\theta)=a\cos^3\theta,\ y=y(\theta)=a\sin^3\theta\ \ (a>0)$ について次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}$ を求めよ.　　(2) このアステロイドの囲む図形の面積 $S(D)$ を求めよ.

8. 解析学II

8.1 級数の収束・発散

[1] 次の級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^3}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ (a, b: 正の定数) (4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

[2] 次の級数の収束性 (絶対収束・条件収束・発散) を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$

[3] (1) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し, また, $a_n\le 1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を満たしているとする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ も収束することを示せ.

(2) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ で次の条件を満たすものの例を 1 つあげよ. (理由の説明は不要)

条件: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束しないが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ は収束する.

[4] (1) 正項級数について「比較の原理」を記せ.

(2) 「比較の原理」のみを用いて, 次の級数の収束・発散を判定せよ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (ヒント — 適当な関数の積分と比較せよ)

(3) (2) を用いて, 次の級数の収束・発散を判定せよ. (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$

[5] 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ の収束・発散を関数 $\dfrac{1}{x^p}$ の積分と比較することによって判定せよ.

[6] 次の無限級数は収束, 発散のいずれであるかを理由を付けて答えよ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$

8.2 関数列・関数項級数

[1] 次の用語の定義を記せ:

(1) 区間 I 上の関数列 $f_n(x)$ が関数 $f(x)$ に一様収束する.

(2) 区間 I 上の関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ が 一様収束する.

[2] 区間 $[0,1]$ 上の関数列 $f_n(x) = nxe^{-nx}$ $(n \geq 1)$ を考える.

(1) 関数 $f_n(x)$ のグラフを描き, $n \to \infty$ のときグラフがどのように変化していくか説明せよ.

(2) 極限関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(3) 関数列 $f_n(x)$ が極限関数 $f(x)$ に一様収束するかどうか調べよ.

[3] $x \geq 0$ において, 関数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{(nx+1)^2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は, 関数 $f(x) = 0$ に各点収束するが一様収束しないことを示せ.

[4] Weierstrass の優級数判定法を用いて次の関数項級数が一様収束することを示せ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx^2}{n^2}$

[5] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ (x は実数) は一様収束することを示せ.

(2) 次式が成り立つことを説明せよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

[6] 一様収束する関数項級数は, 各点収束する関数項級数に比べ, 良い性質を多く持っている.
そのような性質を 2 項目記せ.

[7] (1) $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \geq 1)$ を, 区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする.

(i) 次の用語の定義を記せ: 『関数列 $f_n(x)$ $(n \geq 1)$ が関数 $f(x)$ に $[a, b]$ 上一様収束する.』

(ii) $f_n(x)$ $(n \geq 1)$ が $f(x)$ に $[a, b]$ 上で一様収束するとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) 関数 $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2}$ について, 次の問に答えよ.

(i) 関数 $f_n(x)$ のグラフを描き, $n \to \infty$ のときグラフがどのように変化していくか説明せよ.

(ii) 極限関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(iii) 関数列 $f_n(x)$ が 極限関数 $f(x)$ に一様収束するかどうか調べよ.

(3) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ が一様収束するかどうか判定せよ.

[8] 関数列 $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が, 次の区間で一様収束するかどうかを調べよ.

(i) 区間 $1 \leqq x \leqq 2$ (ii) 区間 $1 \leqq x < \infty$

8.3 整級数

[1] 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 r の定義を述べよ.

[2] 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n x^n$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!} x^n$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ (ただし, k は 0 以上の整数) (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$ (9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$

[3] (1) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$ はどのような整数値 x に対して収束するか.

(2) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$ の収束半径を求めよ.

[4] 整級数で表された関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ について, 以下の問に答えよ. (この整級数の収束半径は 1 である)

(1) $f'(x)$ を x の簡単な式で表わせ.

(2) $f(x)$ を x の簡単な式で表わせ.

[5] 次の等式が成り立つことを示せ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$

[6] 次の関数のマクローリン級数を求めよ. 次に, この関数がマクローリン級数に展開可能かどうか調べよ.

(1) $f(x) = \cos x$ (2) $g(x) = \sin^2 x$ (3) $h(x) = \log(1+2x)$

[7] 次の関数のマクローリン展開を求めよ. (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (2) $g(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x$

[8] 次の関数の整級数展開 (マクローリン展開) を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}$ (2) $(1-2x)^{1/3}$ (x^3 の項まで) (3) $\mathrm{Tan}^{-1} x$

8.4 Fourier 級数

[1] 整数 m, $n \geq 0$ に対して, 次の積分の値を求めよ: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$

[2] 閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数を

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とする.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数 a_n $(n \geq 0)$, b_n $(n \geq 1)$ を $f(x)$ についての定積分で表す式を記せ. (答えのみでよい.)

(2) 閉区間 $[-\pi, \pi]$ で関数 $\cos\alpha x$ を考え, $f(x)$ とする. ただし, α は定数で, 整数ではないとする. $f(x)$ は偶関数か, 奇関数か, いずれでもないか, 答えのみ記せ. また, $f(x)$ のフーリエ係数を求めよ.

[3] 関数 $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ を周期 2π で $\mathbf{R}$ 上に拡張した関数 $\widetilde{f}(x)$ のグラフを描け.

(2) $f(x)$ の Fourier 級数展開を求めよ.

(3) (2) で求めた Fourier 級数の値・収束性について説明せよ.

[4] 関数 $f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 級数展開を求めよ.

[5] 周期 2π の周期函数 $f(x) = \pi - x \ (0 \leq x < 2\pi)$ の Fourier 級数を求めよ.

[6] 次式で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ の Fourier 級数を求めよ. $f(x) = \begin{cases} \pi - x & (0 < x \leqq \pi) \\ \pi + x & (-\pi < x \leqq 0) \end{cases}$

8.5 微分方程式の整級数解法

[1] 微分方程式 $y'' - xy' - y = 0$ の整級数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を以下の手順で求めよ.

(1) 導関数 $y'(x), y''(x)$ を (整級数の形で) 求めよ.

(2) 整級数 $y(x), y'(x), y''(x)$ を微分方程式に代入して, 係数 c_n の満たす漸化式を求めよ.

(3) (2) の漸化式より係数 c_n を定め, 解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を求めよ.

(4) 求めた整級数解の収束性を調べよ.

[2] 微分方程式 $y'' + xy = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 0$ の整級数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を以下の手順で求めよ.

(1) 導関数 $y''(x)$ を整級数の形で記せ.

(2) 整級数 $y(x), y''(x)$ を微分方程式に代入して, 係数 c_n の満たす漸化式を求めよ.

(3) 初期条件と (2) の漸化式より係数 c_n を定め, 解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を求めよ.

(4) 得られた整級数解の収束半径を求めよ.

[3] 微分方程式 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ の $y(0) = 0, y'(0) = 1$ を満たす解を求めよ.

9. 統計数理

以下で $z(\alpha)$ は標準正規分布の上 (右) 側 α 点を表す. 必要に応じて標準正規分布表, t 分布表, χ^2 分布表, F 分布表を参照せよ. また, 次の概数を用いてもよい.

$$\sqrt{2} \doteqdot 1.414, \quad \sqrt{3} \doteqdot 1.732, \quad \sqrt{5} \doteqdot 2.236, \quad \sqrt{7} \doteqdot 2.646, \quad \sqrt{10} \doteqdot 3.162.$$

9.1 確率, 条件付き確率, ベイズの定理

[1] 公正なサイコロ 1 個を 6 回繰り返して投げるとき, 次の事象

$$A = \{\,4\text{ 回以上連続して奇数が出る}\,\}$$
$$B = \{\,1\text{ 回目は偶数が出て }2\text{ 回目は奇数が出る}\,\}$$

を考える. このとき条件付き確率 $P(A|B)$ を求めよ. また A と B は独立でないことを示せ.

[2] さいころを 2 回投げるとき, 出た目の和が 5 である事象を A とし, 7 である事象を B とし, 1 回目に 1 が出る事象を C とする.

(1) A と C は独立であるか.

(2) B と C は独立であるか.

[3] 偏りのないサイコロを 2 回投げるとき, 出た目の和が 5 で割り切れる事象を A とし, 出た目の和が 6 で割り切れる事象を B とし, 1 回目に奇数の目が出る事象を C とする.

(1) 事象 C が起きた時に事象 A が起きる条件付き確率 $P(\mathrm{A}|\mathrm{C})$ を求め, 更に, 事象 A と事象 C は独立かどうか判定せよ.

(2) 事象 B と事象 C は独立かどうか判定せよ.

[4] 公正なサイコロを一度だけ振り, 出た目を X とする.

(1) ふさわしい確率空間 $(S, \mathcal{A}, P)$ を定義せよ.

(2) ふたつの事象 $A := \{X \leq 2\}$, $B := \{X \geq 4\}$ が, 互いに独立であるかどうか, 理由を付けて答えよ.

(3) ふたつの事象 $C := \{X\text{ は偶数}\,\}$, $D := \{X\text{ は }3\text{ の倍数}\,\}$ が, 互いに独立であるかどうか, 理由を付けて答えよ.

[5] 1 から 10 までの自然数が等確率で出る特殊なサイコロを, 一度だけ投げる.

(1) ふさわしい確率空間 $(S, \mathcal{A}, P)$ を定義せよ.

(2) 事象 A を「目が奇数である」と定め, 事象 B を「目が 10 の約数である」と定める. A と B が独立であるかどうか, 教科書（または講義）の定義にしたがって答えよ.

(3) 事象 C を「目が素数である」と定める. A と C が独立であるかどうか, 教科書（または講義）の定義にしたがって答えよ.

[6] ある会社の製品 α と関連製品 β の普及率を C 市の消費者について調べたところ, α を持っている人のうちの 90% が β を持ち, α をもっていない人のうちの 5% が β を持っていることがわかった. また, 全体での α の普及率は 10% であった. C 市の消費者から無作為に選んだ 1 人について, 以下の各問に答えよ.

(1) β を持っている確率を求めよ.

(2) β を持っているという条件の下での α を持っている条件付確率を求めよ.

[7] あるアーティストの 2 種類の CD α と β の普及率を U 大学の学生について調べたところ, β を持っている学生のうちの 70% が α を持ち, β をもっていない学生のうちの 10% が α を持っていることがわかった. また, U 大学の学生全体での β の普及率は 20% であった. U 大学の学生から無作為に選んだ 1 人について, 以下の各問に答えよ.

(1) α を持っている確率を求めよ.

(2) α を持っているという条件の下での β を持っている条件付確率を求めよ.

[8] 2008 年における価格が 300 円である製品 T がある. ある国の調査によれば, T の価格が 1000 円に値上げされると, 2008 年に T を日常的に購入する国民のうち, 80% が購入をやめるという (値上げ以前に購入していない国民は値上げ後も購入しない). また, 2008 年には国民の 30% が T を日常的に購入しているという.
2009 年 1 月 1 日, T の価格が 1000 円に値上りした. この後に国民 A 氏へのインタビューを行ったところ, A 氏は 2009 年には T を日常的に購入していない, との事だった. このとき, A 氏が 2008 年に T を日常的に購入していた条件付き確率を求めよ.

[9] ある工場で, 従業員の 60% が男子, 40% が女子であり, 男子中で携帯電話を持っているものが 50%, 女子中で 70% ある. 工場内に従業員の携帯電話が落ちていた. 持ち主が男子である確率を求めよ.

[10] 2 つの壺 U_k $(k = 1, 2)$ がある. 壺 U_k には赤玉が $k+1$ 個, 白玉が 3 個入っている. サイコロをひとつ振って, 出た目の数が 1 または 2 のときは U_1 の壺を選び, 出た目の数が 3 以上のときは U_2 の壺を選び, 選んだ壺が U_k のとき $k+1$ 個の玉をその壺から取り出すものとする.

(1) 取り出された玉のうちに白玉がちょうど 2 個あったとするときの, 選んだ壺が U_k である条件付確率 P_k を求めよ $(k = 1, 2)$.

(2) 取り出された玉のうちの白玉の個数を表す確率変数を X とするとき, X の平均 (期待値) を求めよ.

[11] 3 つの壺 U_k（$k=1, 2, 3$) がある．壺 U_k には赤玉が k 個, 白玉が 3 個入っている．サイコロをひとつ振って, 出た目の数が 1 のときは U_1 の壺を選び, 出た目の数が 2 または 3 のときは U_2 の壺を選び, 出た目の数が 4 以上のときは U_3 の壺を選び, 選んだ壺から 3 個の玉を取り出すものとする．取り出された玉のうち 1 個が赤玉, 2 個が白玉であったとするとき, 選んだ壺が U_k である確率 P_k を求めよ ($k=1, 2, 3$).

9.2 1 次元確率分布

[1] 確率変数 X が $P(X=2)=p$, $P(X=-1)=q$, $P(X=0)=r$（$p+q+r=1$）を満たしているとする.

(1) $r=0$ として, X の期待値 $E(X)$ が 0 と等しくなるように p, q の値を定め, そのときの X の分散 $V(X)$ の値を求めよ.

(2) $E(X)=0$, $V(X)=1$ となるように p, q, r の値を定めよ.

[2] 2 項分布 $B(n,p)$ の 平均値 が $\mu=np$ となる事を示せ.

[3] (1) ある伝染性のない病気 C に対して, 薬 A が この病気の患者を治す確率は 0.4 である．10 人の患者にこの薬を投与したとき, 4 人以上の患者が治る確率を求めよ.

(2) ある都市では, 1 日平均 3 人の急病人が出る．急病人が 1 日に 3 人以上出る確率を求めよ.

[4] ある従業員 1000 人以上の工場で, 1 日平均 4 人の欠勤者が出る.

(1) 欠勤者が 2 以下の確率を求めよ.

(2) 1 日当り欠勤者 X に対して $Y=X^2+5X$ 万円の損失が発生する．Y の平均を求めよ.

[5] ある工場で生産している製品の不良品である確率は 2% である．この製品 200 個を 1 箱に梱包して出荷している．1 箱中の不良品の個数を X とする.

(1) X の確率分布を求めよ．さらに X が 3 以下である確率を求めよ (確率を与える式を記すだけで良い).

(2) X が 3 以下である確率を, ポアソン分布による近似を用いて求めよ (確率を与える式を記すだけで良い).

[6] 自然数値のみを取る離散型確率変数 X が $P(X=n)=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\ldots)$ を満たしている．このとき, $\theta<\log 2$ について X の積率母関数 $\varphi_X(\theta)$ を求めよ．さらに, X の期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を求めよ.

[7] 11 本のくじがあり, 当たりくじが 1 本入っている．このくじを 1 本づつ引いていく．(引いたくじは戻さない.) 当たりくじが n 本目に出る確率を p_n とし, 離散的な確率分布の確率変数 X を $P(X=n)=p_n$ で定める. X の確率分布, X の積率母関数 $M_X(\theta)=E(e^{\theta X})$, 平均 (期待値) $E(X)$ と分散 $V(X)$ をそれぞれ求めよ.

[8] この問題では, 等式 $\exp(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ が, すべての実数 x に対して成り立つことを, 証明なしに利用してよい．また, $0!=1$ と定義されている．λ は正の定数で, 確率変数 X は Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする.

(1) $P(X=k)>0$ となるのは, どのような k のときか？ また, $P(X=k)$ の値を書け.

(2) X の期待値と分散を求めよ.

(3) 積率母関数 $M(t) := E(e^{tX})$ を計算せよ.

[9] 次の用語の定義を簡潔に記せ.

(1) X が連続型の確率変数である.

(2) $f(x)$ が確率密度関数である.

(3) X が $f(x)$ の定める確率分布に従う.

[10] X は連続型の確率変数で, 確率密度関数 $f(x)$ を持つとする.

(1) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つ事を示せ.

(2) 確率変数 $Y = aX + b \ \ (a > 0)$ の確率密度関数 $g(y)$ を求めよ.

[11] 確率変数 X は, 指数分布 Ex (1) に従うとする.

(1) X の分布関数 $F(x)$, 密度関数 $f(x)$ を数式で表し, 双方のグラフを描け.

(2) 新たな確率変数 $Y := e^{-X}$ を定義する. Y の分布関数 $G(y)$, 密度関数 $g(y)$ を数式で表し, 双方のグラフを描け.

[12] 確率変数 X が正規分布 $N(-1, 9)$ に従うとする.

(1) $Y = 3X + 5$ および $Z = \dfrac{X+1}{3}$ の確率分布をそれぞれ記せ.

(2) 確率 $P(X > 2)$ を求めよ.

(3) 確率 $P(X > c) = 0.01$ となるような定数 c の値を求めよ.

[13] ある規格の製品の質量 X (グラム) が正規分布 $N(250, 0.2^2)$ に従っている. このとき, 標準正規分布表を用いて, 確率 $P(X \geq 250.24)$, および $P(249.72 \leq X \leq 250.10)$ を求めよ.

[14] ある県の中学 2 年生 1000 人に対して, ある試験を行なったところ, その得点はほぼ正規分布 $N(60, 20^2)$ に従っていた.

(1) 得点が 50 以上 80 以下の学生は何人いるか.

(2) 得点が上位 20% 以内に入るには, 何点以上をとっていなければならないか.

[15] Z は, 密度関数 $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ を持つ連続確率変数とする.

(1) Z の積率母関数 $M_Z(t) := E(e^{tZ})$ を計算し, そのグラフをかけ.

(2) $X = Z^2$ と置く. このとき, X の密度関数 $f_X(x)$ を求めよ.

注意. $f_X(x)$ は, 積分の結果に影響がなければ, いくつかの x での値が異なってもよい.

[16] 次の関数 $F(x)$ を分布関数として持つような確率分布を考える.

$$x < 0 \text{ のとき } F(x) = 0, \qquad x \in [0,1] \text{ のとき } F(x) = x^2, \qquad x > 1 \text{ のとき } F(x) = 1.$$

このとき, 密度関数 $f(x)$ を求めよ. さらに, $F(x)$, $f(x)$ のグラフを描け.

[17] 確率変数 X の密度関数 $f(x)$ が次で与えられているとする. $f(x) = \begin{cases} K(1-x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(1) 定数 K の値を定め, X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \ (-\infty < x < \infty)$ のグラフの概形を描け.

(2) X, X^2 の期待値 $E(X)$, $E(X^2)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.

[18] c は正の定数とする. 実数値確率変数 X は連続分布を持ち, 密度関数が $x \leq 1$ のとき $f_X(x) = 0$ で, $x > 1$ のとき $f_X(x) = \dfrac{c}{x^6}$ で与えられる.

(1) c の値を求めよ. また, X の分布関数 $F_X(x)$ を求めよ. 注意. $f_X(x)$ は, 積分の結果に影響がなければ, いくつかの x での値が異なってもよいが, $F_X(x)$ は, すべての実数 x での値が, ひとつずつ定まる. この注意は, すべての設問にあてはまる.

(2) $F_X(x)$ のグラフをかき, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_X(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_X(x)$ を求めよ.

(3) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ.

(4) 新たな確率変数 $Y = X - 1$ を定義する. Y の分布関数 $F_Y(y)$, 密度関数 $f_Y(y)$ を求めて, それぞれのグラフをかけ.

(5) 新たな確率変数 $Z = 1/X$ を定義する. Z の分布関数 $F_Z(z)$, 密度関数 $f_Z(z)$ を求めて, それぞれのグラフをかけ.

[19] 連続型確率変数 X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ が $F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ (\sin x)^2 & (0 \leqq x \leqq \pi/2) \\ 1 & (\pi/2 < x) \end{cases}$ を満たしているとする.

(1) X の密度関数 $f(x)$ を求め, そのグラフの概形を描け.

(2) 確率 $P(\pi/6 \leqq X \leqq \pi/4)$ および X の期待値 $E(X)$ を求めよ.

9.3 多次元確率分布, 標本分布

[1] 2 つの離散型確率変数 X, Y の同時確率関数 $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ が

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \big((x,y) = (0,3), (1,3), (3,1), (4,1)\big) \\ 0 & (\text{ その他 }) \end{cases}$$

で与えられているとする. X, Y の周辺確率関数 $p_X(x)$, $p_Y(y)$, 期待値 $E(X)$, $E(Y)$, 分散 $V(X)$, $V(Y)$ および X, Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ.

[2] 確率変数 X, Y は互いに独立で, ともに, 0 以上の整数の値をとると仮定する.

(1) $P(X+Y=k)$ を表す「たたみ込み」と呼ばれる数式を書け.

(2) 定数 p は $0<p<1$ を満たすと仮定する. 確率変数 X, Y は互いに独立で, X, Y はともに幾何分布 $\mathrm{Geo}(p)$ に従うと仮定する. つまり, 定数 $c>0$ があって, すべての自然数 k に対し $P(X=k)=P(Y=k)=c(1-p)^{k-1}$ を満たすとする. これにふさわしい c の値は, ただひとつ決まる. その値は何か？次いで, $P(X+Y=k)$ を求めよ.

[3] 次の用語の定義を簡潔に記せ.

(1) 関数 $f(x,y)$ が 2 次元確率密度関数である.

(2) 変量 (X,Y) が 2 次元連続型確率変数である.

(3) (X,Y) が同時確率密度関数 $f(x,y)$ を持つ.

[4] (X,Y) は 2 次元連続型確率変数で, 同時確率密度関数 $f(x,y)$ を持つとする.

(1) 次の用語の定義を記せ:

(i) X, Y に関する周辺確率密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(ii) X, Y は 互いに独立.

(iii) (X,Y) の共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(2) 関数 $Z=\phi(X,Y)$ の平均 $E(Z)$ を $f(x,y)$ 及び $\phi(x,y)$ を用いて表せ.

(3) 次の等式を示せ.

(i) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　　(ii) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$　　(iv) X, Y が独立のとき $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$

[5] X, Y をそれぞれパラメータ (期待値) が α, β の指数分布に従う確率変数とする. X, Y は独立であるとする.

(1) X, Y の同時確率密度関数 $f(x,y)$ を求めよ.

(2) $\alpha=2$, $\beta=1$ のとき, 確率 $P(X+Y\leq 3)$ を計算せよ.

[6] 次の, 2 つの連続型確率変数 X と Y の同時確率密度関数を考える.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{12}{7}(xy+y^2) & ((x,y)\in D=\{\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\,\})\\ 0 & ((x,y)\notin D)\end{cases}$$

(1) X の周辺確率密度関数 $g(x)$ と Y の周辺確率密度関数 $h(x)$ を求めよ.

(2) X, Y の期待値 $E(X)$, $E(Y)$ と共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ.

[7] 2 つの連続型確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y)=\begin{cases}3xy+y^3 & (0\leq x\leq 1 \text{ かつ } 0\leq y\leq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

で与えられる. このとき, 期待値 $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(XY)$, 共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ.

[8] D を次で定義される平面の閉領域とする: $D = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

(X,Y) が同時確率密度関数 $f(x,y) = \begin{cases} K(x+y) & ((x,y) \in D \text{ の場合}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$ を持つとき次の値を求めよ:

(1) K (2) $E(X)$, $E(Y)$ (3) $\mathrm{Cov}(X,Y)$

[9] 2 次元の同時密度関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$0 \le y \text{ かつ } y^2 \le x \text{ のとき } f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x}, \quad \text{それ以外のとき } f(x,y) = 0.$$

(X,Y) は, これを密度に持つ 2 次元の確率変数とする. X, Y それぞれの周辺密度関数, つまり X だけの密度関数 $f_1(x)$ と, Y だけの密度関数 $f_2(y)$ を求めよ.

[10] 2 次元確率変数 (X,Y) の同時密度関数 $f(x,y)$ を, $0 \le x \le y$ のとき $f(x,y) = \exp(-y)$ で, それ以外のとき $f(x,y) = 0$ で定める. 周辺密度関数, つまり X だけの密度関数 $f_1(x)$ と, Y だけの密度関数 $f_2(y)$ を求めて, それぞれのグラフをかけ.

[11] (1) X を 区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数とする. 確率変数 Y を 1 辺 X の立方体の体積とするとき, Y の分布関数と密度関数を求めよ.

(2) 独立な確率変数 X_1, X_2 のそれぞれの平均と分散を $E(X_i) = \mu_i$, $V(X_i) = v_i$ $(i = 1, 2)$ とする. $W = 2X_1 - 3X_2 + 5$ とするとき, W および W^2 の平均 $E(W)$, $E(W^2)$ を μ_1, μ_2, v_1, v_2 を用いて表せ.

[12] バスで A 停留所から B 駅まで行き, 次に電車で B 駅から C 駅まで行く. B 駅には, C 駅行きの電車が 5 分間隔で到着する. 一方, A 停留所には B 駅行きのバスが 10 分間隔で到着するが, 途中の混雑等で, このバスが B 駅に到着するのは, C 駅行き電車の発車間隔に対してはランダムになるものとする. ある人が, A 停留所 にランダムに到着するとき, A 停留所でのバスの待ち時間を X, B 駅での電車の待ち時間を Y とする.

(1) X, Y, (X,Y) の確率分布を求めよ.

(2) $E(X+Y)$ を求めよ.

(3) $X + Y \le 10$ となる確率を求めよ.

[13] (1) A さんが 100 メートル泳ぐタイムを確率変数 T (秒) とすると, T は平均 73, 標準偏差 4 である正規分布 $N(73, 4^2)$ に従って分布するという. A さんが 100 メートルを 70 秒より速く泳ぐ確率を求めよ.
また B さんの 100 メートル泳ぐタイムを確率変数 U (秒) とすると, U は平均 71, 標準偏差 3 である正規分布 $N(71, 3^2)$ に従って分布するという. 100 メートルを泳いだとき A さんが B さんより遅い確率を求めよ.

(2) 5 択の問題 100 問からなる試験で全ての問題にでたらめに答えたとき, 27 問以上正解する確率の近似値を, 中心極限定理を用いた近似を用いて求めよ.

[14] A さんは毎朝 8 時ちょうどに自宅を出て歩いて通勤している. 通勤にかかる時間は T 分であり, T は平均 30, 標準偏差 4 である正規分布 $N(30, 4^2)$ に従って分布するという.

(1) A さんが 8 時 24 分と 8 時 27 分の間に職場に到着する確率を求めよ.

(2) A さんの同僚の B さんは毎朝 8 時 15 分ちょうどに自宅を出て車で通勤している. 通勤にかかる時間は U 分であり, U は平均 11, 標準偏差 3 である正規分布 $N(11, 3^2)$ に従って分布するという. A さんが B さんより早く職場に到着する確率を求めよ.

[15] 確率変数 X, Y は独立であって, それぞれ正規分布 $N(1, 9)$, $N(-3, 16)$ に従うとする.

(1) 確率 $P(X > 1)$ および $P(-7 < Y < 5)$ の値を求めよ.

(2) $X + Y$ および $X - Y$ の確率分布をそれぞれ記せ.

(3) 確率 $P(X + Y < 1)$ を求めよ. また, $P(X - Y > a) = 0.5$ となるような定数 a の値, および, $P(|X - Y - 4| > b) = 0.05$ となるような定数 b の値を求めよ.

[16] 確率変数 X, Y は独立であって, それぞれ正規分布 $N(1, 16)$, $N(2, 9)$ に従うとする.

(1) 確率 $P(-7 < X < 3)$ および $P(Y < 2)$ の値を求めよ.

(2) $X + Y$ および $X - Y$ の確率分布をそれぞれ記せ.

(3) 確率 $P(X + Y > 1)$ を求めよ. また, $P(X - Y < a) = 0.5$ となるような定数 a の値, および, $P(|X - Y + 1| < b) = 0.05$ となるような定数 b の値を求めよ.

[17] 正規分布 $N(102, 4^2)$ に従う確率変数 X と, 正規分布 $N(98, 3^2)$ に従う確率変数 Y があり, X と Y は独立である.

(1) 確率変数 $X + Y$, $X - Y$ それぞれの, 平均, 分散, 確率分布を求めよ. 更に, $X + Y$ と $X - Y$ の共分散を求めよ. $X + Y$ と $X - Y$ は独立であるか, 判定せよ.

(2) X の値が Y の値より小さくなる確率 $P(X < Y)$ を求めよ.

(3) 確率 $P(X + Y > a) = 0.975$ となる a の値を求めよ.

[18] 確率変数 X, Y は独立であって, それぞれ正規分布 $N(5, 4)$, $N(0, 9)$ に従うとする.

(1) $Z = \dfrac{X - 5}{2}$ および $X + Y$ が従う確率分布をそれぞれ求めよ.

(2) 確率 $P(X > 5)$ および $P(X^2 - 3X + 2 < 0)$ を求めよ.

(3) 確率 $P(XY < 0)$ を求めよ.

[19] 確率変数 X, Y は独立であって, それぞれ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $N(0, 1)$ に従うとする.

(1) $E(X) = 1$, $E(X^2) = 3$ が成立つとき, μ, σ^2 の値を求めよ.

(2) $\mu = -3$, $\sigma^2 = 4^2$ のとき, 確率 $P(-2 < X < 2)$ および $P(X > -3)$ を求めよ. また, 確率変数 $X + 3Y$ の確率分布を求め, 等式 $P(X + 3Y > 2) = P(Y > c)$ を満たす定数 c の値を求めよ.

[20] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$ を用いて次の問に答えよ.

(1) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の平均が μ になる事を示せ.

(2) (X, Y) の同時確率密度関数が $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-2x^2-2xy-y^2}$ であるとする.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ の値を求めよ.

(ii) X の周辺確率密度関数 $g(x)$ を求め, X の確率分布を調べよ. (Y の確率分布は正規分布 $N(0, 1)$ である.)

(iii) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

[21] (X, Y) の 同時確率密度関数 が $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}$ のとき, X に関する 周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求め, さらに $E(X)$, $V(X)$ を求めよ.

[22] 母集団 Ω 上で変量 X を考える.

(1) 次の用語の定義を記せ: (a) 母集団分布 (b) 標本確率変数 (c) 統計量 (d) 標本分布

(2) 標本平均 $\overline{X}$ に関する「大数の法則」及び「中心極限定理」の内容を簡潔に説明せよ.

[23] X は母集団 Ω 上の確率変数で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする. $X_1, \ldots, X_n$ を Ω からの大きさ n の独立な標本確率変数とし, 各 X_i は X と同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする. 以下の $\boxed{}$ の中に適当な式・用語を入れよ.

(1) 重要な統計量として標本平均 $\overline{X} = \boxed{}$, 平方和 $S = \boxed{}$, 不偏分散 $V = \boxed{}$ がある.

(2) 統計量 $\overline{X}$ と S は確率変数として $\boxed{}$ であり, $\overline{X}$ は確率分布 $\boxed{}$ に従い, $\dfrac{S}{\sigma^2}$ は確率分布 $\boxed{}$ に従う. このことから, さらに統計量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}}$ は確率分布 $\boxed{}$ に従うことになる.

[24] $n = 1, 2, 3, \ldots$ とする. 独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ がすべて同じ分布をもち, $E(X_i) = m$, $V(X_i) = v$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする. $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ および $W = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2$ の平均を n, m, v を用いて表せ.

[25] 中心極限定理を正確に記せ.

[26] あるオモチャの車を始動させてから停止するまでの走行距離を X メートルとしたとき, X は期待値 10.0, 分散 0.5^2 の確率分布に従うという. このオモチャを始動させてから停止するまで走らせる, という操作を各回独立に 400 回繰り返し, その総走行距離を L とする. このとき, 中心極限定理を用いて, 確率 $P(L \geq 4017)$ の近似値を求めよ.

注. 走行距離は連続分布であるので, 半整数補正は用いないこと.

[27] ある製品における不良品の確率は 10% である. この製品 400 個中の不良品の個数を X とするとき, 確率 $P(38 \leq X \leq 46)$ を, 正規分布による近似を用いて求めよ.

[28] 1 つのサイコロを 180 回投げて 1 の目が出た回数を X とする. X の (理論的な) 確率分布, 期待値, 分散を求めよ. さらに, 確率 $P(25 \leqq X \leqq 32)$ の近似値を求めよ. ただし, 近似値を求めるときに精度を良くする工夫を行った場合, それを何と言うかも併せて答えよ.

[29] 1 つのコインを 100 回投げて表が出た回数を X とする. X の (理論的な) 確率分布, 期待値, 分散を求めよ. さらに, 確率 $P(45 \leqq X \leqq 60)$ の近似値を求めよ. ただし, 近似値を求めるときに精度を良くする工夫を行った場合, それを何と言うかも併せて答えよ.

[30] 1 つのサイコロを 450 回投げて 1 または 2 の目の出た回数を X とする. 確率 $P(160 \leqq X \leqq 170)$ を求めよ.

[31] 1 つのサイコロを 1800 回振るとき, 2 以下の目の出る回数が 580 以上 620 以下である確率を, 正規分布による近似を用いて求めよ.

[32] 1つのコインを 400 回投げて表が出た回数を X とする. X の確率分布, 期待値, 分散を求めよ. さらに, 確率 $P(205 \leqq X \leqq 218)$ の近似値を小数第 2 位まで求めよ. 近似値を求めるときに精度を良くする工夫を行った場合は, それを何と言うかも併せて答えよ.

[33] 1つの公正なサイコロを 720 回投げて 1 の目が出る回数を X とする. X の確率分布, 期待値, 分散を求めよ. さらに, 確率 $P(100 \leqq X \leqq 150)$ の近似値を小数第 2 位まで求めよ. 近似値を求めるときに精度を良くする工夫を行った場合は, それを何と言うかも併せて答えよ.

[34] 自由度 n の χ^2 分布 χ_n^2 の確率密度関数のグラフの概形を描き, 上側 α 点 $\chi^2(n,\alpha)$ をそのグラフに書き込め.

[35] (1) カイ 2 乗分布 χ_n^2 の定義を記せ.

(2) $X_1,\ldots,X_n$ は独立で, すべてが正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする. $\sigma^2>0$ とする.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)^2$$

と定める. $n\overline{X_n}$, $\dfrac{n}{\sigma^2}V_n^2$, $\dfrac{n}{\sigma^2}S_n^2$ のうち χ_n^2 に従うものをすべて挙げ, その理由を簡潔に述べよ.

[36] $\alpha>0, \beta>0$ とする. 確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ は独立で, 同じ確率分布に従い, すべての $i\in\{1,\ldots,n\}$ に対し共通な積率母関数は $M_{X_i}(t)=E(e^{tX_i})=\frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$ と仮定する.

(1) $E(X_i)$, $V(X_i)$ を求めよ.

(2) $Y_n = X_1+\cdots+X_n$ を定める. $E(Y_n)$, $V(Y_n)$, $M_{Y_n}(t)=E(e^{tY_n})$ を求めよ.

(3) Y_n の z-変換を Z_n であらわす. $M_{Z_n}(t)=E(e^{tZ_n})$ および $n\to+\infty$ での極限を求めよ.

9.4 区間推定

[1] ある製造機械で製造される商品の重さは正規分布に従うと考えられ, その平均を μ グラム, 標準偏差を σ グラムとする. この製品 16 個を無作為に抽出したとき, 得られたデータが $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ であった. このデータから計算した標本平均の値が 220 で不偏分散の値が 16 であった.

(1) このデータの標本平均および不偏分散を $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ の式で表せ.

(2) $\sigma = 4$ が分かっているとしたときに, μ の信頼度 90% の信頼区間を求めよ.

(3) σ が未知としたとき, μ の信頼度 99% の信頼区間を求めよ.

[2] 全国一斉テストが行われた. 予備調査の結果から得点の標準偏差は 10 点と予想される. 全国平均点を信頼度 95% で誤差 1 点以内で推定するには, 何人を抽出して平均を調べれば良いか.

[3] ある会社で製造している製品 A の耐用時間 X (時間) の平均 μ を推定するため, この製品から 18 個を抽出し, 耐用時間を測定したところ, その平均は $\overline{x} = 1020$, 分散は $s^2 = 850$ であった. 過去のデータから, X は分散 $\sigma^2 = 800$ の正規分布に従うことが知られている. μ の信頼率 95% の信頼区間を求めよ.

[4] ある食料品メーカーで生産している飲料製品 A の内容量 X ($m\ell$) の分散 σ^2 を推定するため, この製品 10 個を抽出し, 内容量を測定したところ, 次のデータが得られた.

503　500　502　500　503　501　499　500　502　500

過去のデータから, X は正規分布に従うことが知られている.

(1) このデータの平均 $\overline{x}$ 及び分散 s^2 を求めよ.

(2) σ^2 の推定値 u^2 を求めよ.

(3) σ^2 の信頼率 95% の信頼区間を求めよ.

[5] 母分散 σ^2 の信頼率 $1-\alpha$ の信頼区間は次で与えられる:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}.$$

この命題に関して 以下の問に答えよ.

(1) 母分散 σ^2 の信頼率 p の信頼区間の定義を記せ.

(2) 上の命題では母集団分布及び標本確率変数に適当な仮定が置かれている. その仮定を正確に記せ.

(3) この区間推定において用いられた推定量及びその確率分布を記せ.

(4) 不等式に現れる数値 n 及び s^2 の定義を記せ.

(5) 不等式に現れる確率分布 χ^2_{n-1} の確率密度関数のグラフの概形を描き, さらに, 数値 $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$ 及び $\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ を「どのような意味を持つ値かわかるように」図中に書き込め.

(6) 上の命題を証明せよ.

[6] 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, すべてが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. $0 < \sigma^2 < \infty$ を仮定する.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2, \qquad U_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2$$

と定める. $\dfrac{n-1}{\sigma^2}U_n^2$ が χ^2_{n-1} に従うことを前提として, この問題を解いてよい. また, 記号 $z(\alpha)$ の意味は, X が $N(0,1)$ に従うとき $P(X > z(\alpha)) = \alpha$ である. 記号 $\chi^2_n(\alpha)$ の意味は, X が χ^2_n に従うとき $P(X > \chi^2_n(\alpha)) = \alpha$ である.

(1) (i) カイ 2 乗分布 χ_n^2 の定義を記せ. (ii) $\dfrac{n}{\sigma^2}V_n^2$ が χ_n^2 に従う理由を簡潔に述べよ.

(2) σ^2 が既知のとき, μ の信頼度 95% の信頼区間を導出する過程を説明せよ.

(3) μ が既知のとき, σ^2 の信頼度 95% の信頼区間を導出する過程を説明せよ.

(4) μ が未知のとき, σ^2 の信頼度 95% の信頼区間を導出する過程を説明せよ.

9.5 点推定

[1] 次の確率密度関数で定義される分布をパラメータ λ の指数分布と呼ぶ： $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\Bigl(-\dfrac{x}{\lambda}\Bigr) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

X は母集団 Ω 上の変量でパラメータ λ の指数分布に従っているとする. $X_1, \ldots, X_n$ を Ω からの n 個の独立な標本確率変数とし, 標本調査の結果, 標本値 $x_1, \ldots, x_n$ が得られたとする.

(1) $E(X)$ を求めよ.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ の同時確率密度関数 $f(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda)$ を求めよ.

(3) λ の尤度関数 $L(\lambda)$ 及び対数尤度関数 $\ell(\lambda)$ を求めよ.

(4) λ の最尤推定値 $\hat{\lambda}$ の定義を述べ, その値を求めよ.

(5) (4) で求めた値 $\hat{\lambda}$ が λ の推定値として適している理由を簡潔に述べよ.

[2] X は 母集団 Ω 上の確率変数で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする. 分散 σ^2 の値は既知であるとする. $X_1, \ldots, X_n$ を Ω からの n 個の独立な標本確率変数とし, 標本調査の結果, 標本値 $x_1, \ldots, x_n$ が得られたとする.

(1) $X_1, \ldots, X_n$ の同時確率密度関数 $g(x_1, \ldots, x_n \mid \mu)$ を求めよ.

(2) 母平均 μ の尤度関数 $L(\mu)$ 及び対数尤度関数 $\ell(\mu)$ を求めよ.

(3) 母平均 μ の最尤推定値 $\hat{\mu}$ の定義を述べ, その値を求めよ.

(4) (3) で求めた値 $\hat{\mu}$ が μ の推定値として適している理由を簡潔に述べよ.

[3] 実数 μ, 自然数 n および 数列 $x_1, \ldots, x_n$ (ただし一定の数の n 回繰り返しではない) は固定されているとする. $\sigma^2 > 0$ の関数 $f(\sigma^2)$ を次式で定義する.

$$f(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

$f(\sigma^2)$ の最大値を与える σ^2 があるかどうか判定し, もしあれば, その σ^2 を, μ と n と $x_1, \ldots, x_n$ の式で表せ.

[4] 袋の中に白石 W 個, 黒石 $2-W$ 個, 計 2 個の同じ材質・大きさの石が入っている. ただし, W は $0 \leq W \leq 2$ なる未知の整数である. この袋から無作為に石を 1 つ取り出して元に戻す試行を各回独立に 3 回行い, 白石を取り出した回数を X とする. この試行について, 二人の学生 A 君, B 君は次のような考えで W の推定量を作った.

A 君の主張: 「1 回石を取り出した時に白石である確率は $\dfrac{W}{2}$ であるから, 3 回行えば X の期待値は $\dfrac{3W}{2}$ になるであろう. 従って, 推定量としては

$$\widehat{W}_A = \frac{2X}{3}$$

が妥当である.」

B 君の主張: 「もし $X = 1$ または 2 ならば, 袋の中には白黒両方の石が入っている事が確実である. $X = 0, 3$ なら一方の石しか入っていない可能性が高いと思われる. したがって,

$$\widehat{W}_B = \begin{cases} 0 & (X = 0 \text{ のとき}), \\ 1 & (X = 1, 2 \text{ のとき}), \\ 2 & (X = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

の方が良い.」

2 つの推定量 $\widehat{W}_A$, $\widehat{W}_B$ はともに W の不偏推定量であることを示せ. さらに, $W = 1$ のとき, $\widehat{W}_A$ の二乗平均誤差と $\widehat{W}_B$ の二乗平均誤差の大小を比較せよ.

Hint. 期待値 $\mathbf{E}(\widehat{W}_B)$ については, $W = 0, 1, 2$ に場合分けして計算する必要がある.

[5] 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 同じ確率分布に従うとする. 正規分布とは限定しない. すべての $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ とする. $n > 2$, $\sigma^2 > 0$ と仮定する. また,

$$H_n = \frac{X_1 + X_n}{2}, \qquad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

と定める.

(1) $E(H_n)$, $V(H_n)$, $E(\overline{X}_n)$, $V(\overline{X}_n)$, $E(V_n^2)$, $E(S_n^2)$ を求めよ. (期待値や分散の顕著な性質を利用する式変形では, 等号のそばに簡潔な説明を書き加えよ.)

(2) 「不偏推定量」の定義は何か. H_n, $\overline{X_n}$, V_n^2, S_n^2 のうち, μ と σ^2 の不偏推定量をすべて挙げよ.

(3) 「有効推定量」の定義は何か. また, (2) で答えた μ の不偏推定量のうち, 有効推定量はどれか.

[6] 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 同じ確率分布に従うとする. 正規分布とは限定しないが $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ とする. $n > 2$, $\mu \neq 0$, $0 < \sigma^2 < \infty$ と仮定する.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

と定める.

(1) 実数 α, β に対し, 新たな確率変数 $Y = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha$, $Z = X_1 \cos\beta + X_2 \sin\beta$ を定める. $\mathrm{Cov}(Y, Z)$ を計算せよ.

(2) Y が μ の不偏推定量になるような α を, $0 \leq \alpha < 2\pi$ の範囲ですべて挙げよ.

(3) $E(\overline{X}_n)$, $V(\overline{X}_n)$, $E(V_n^2)$, $E(S_n^2)$ を求めよ.

(4) $\overline{X}_n$ と (2) で挙げた (いくつかの) Y の中では, どれが μ の有効推定量であるかを判定せよ.

9.6 推定と検定

[1] X は母集団 Ω 上の確率変数で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする. 分散 σ^2 の値は既知であるとする. $X_1, \ldots, X_n$ を Ω からの n 個の独立な標本確率変数とし, 標本調査の結果, 標本値 $x_1, \ldots, x_n$ が得られているとする.

帰無仮説 H_0: $\mu = \mu_0$ を 対立仮説 H_1: $\mu \neq \mu_0$ の下で, 有意水準 α で検定する.

(1) 仮説 H_0 が正しいと仮定して

(i) 検定を行うためにどのような統計量を取ればよいか. また, この統計量はどのような分布に従うか.

(ii) (i) の分布の確率密度関数のグラフの概形を描き, 有意水準 α での棄却域 R を図中に記入せよ.

(2) (i) 仮説 H_0 を棄却する判断基準を述べよ.

(ii) この判断基準が合理的である理由を説明せよ.

(3) この検定において, 有意水準 α はどのような確率を表わしているか.

(4) 帰無仮説が棄却された場合, 平均 μ の値を推定したい.

(i) μ の信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間を記せ.

(ii) (i) に記した区間が μ の信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間 になることを説明せよ.

[2] (1) 母集団分布の母数 θ に関する帰無仮説 H_0: $\theta = \theta_0$ の有意水準 α での検定の一般的方法を説明せよ.

(2) (1) の補足として, 次の用語の定義を述べよ:

(i) 対立仮説 H_1　(ii) 検定量　(iii) 棄却域
(iv) 両側検定, 右側 (左側) 検定　(v) 第 1 種の誤り, 第 2 種の誤り

(3) この検定法において有意水準 α はどのような確率を表すか記せ.

(4) この検定法においてその判断が合理的である理由を記せ.

[3] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ (母分散 σ^2 は 未知) において帰無仮説 H_0: $\mu = \mu_0$ の有意水準 $1-\alpha$ での仮説検定を行う. この仮説検定の棄却域は下記の表のようになる:

対立仮説 H_1	検定法	棄却域
	両側検定	
$\mu > \mu_0$		
	左側検定	

(1) 表の空白に入る用語・式を記せ (但し標本数は n とする).

(2) 上の命題では標本確率変数に適当な仮定 が置かれている. その仮定を正確に記せ.

(3) 仮説 H_0 が正しいと仮定する. この仮説検定で用いる統計量及びその確率分布を記せ.

(4) (3) の確率分布の確率密度関数のグラフの概形を描き, さらに, 検定法ごとに棄却域を図中に書き込め.

(5) 上の命題を証明せよ.

[4] ある部品の仕様書に, 寸法の平均 μ は 25.0mm と書かれている. この部品の中から 16 個を無作為に抜き取り, 寸法を測定して次のデータを得た.

25.6, 25.6, 25.5, 25.2, 24.7, 24.8, 25.3, 25.7, 25.4, 25.8,

25.4, 24.8, 24.9, 25.5, 25.7, 24.9.

寸法の平均 μ は仕様書どおりであると言えるか検定せよ. また, 帰無仮説が棄却された場合は, μ の 信頼度 95% の信頼区間を求めよ. ただし, 標準偏差 $\sigma = 0.4$ はわかっているものとする. また, $z(0.05) = 1.645$, $z(0.025) = 1.96$, $z(0.005) = 2.578$ である.

[5] ある商品の袋には, 一袋の平均の重さが 300g であると書かれている. ある日無作為にこの商品 16 袋を抜き取って重さを測定したところ, 平均は 297.5 g であった. この商品を製造する機械の再調整は必要か？重さの分布は正規分布に従うとして, 標準偏差は 4g であることが分かっているとして, 有意水準 0.01 で検定せよ.

[6] あるコピー機は説明書によれば, 100 枚当たり 1.2 枚の割合で紙づまりを起こすと書かれている. 無作為に選んだ 16 日間に, このコピー機で 1 日につき 100 枚コピーしたところ, 1 日当たりの紙づまりの枚数は以下の通りであった.

2, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 0, 1.

このコピー機の再調整は必要か? 100 枚当たりの紙づまりの枚数は正規分布に従うとし, 標準偏差は 0.08 枚であることが分かっているとして, 有意水準 0.01 で検定せよ.

[7] ある 100m 平泳ぎの競泳選手のタイムは, 平均 58.8 秒の正規分布に従うとする. この選手が最近話題の競泳水着を着用し 10 回泳いでみたところ, タイムは次のようになった.

57.6, 58.2, 56.2, 57.3, 58.7, 58.8, 56.3, 57.1, 57.3, 57.1.

(従って標本平均は 57.46, 不偏分散は 0.794). これを無作為標本と考えるとき, この競泳水着の着用はタイム短縮に効果があると言えるかどうかを有意水準 0.05 で検定せよ. $\sqrt{0.0794} = 0.281$ は用いてよい.

[8] ある正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の実現値が次の表に示されている:

15.4	16.4	16.1	15.3	17.0	16.2	16.5	15.9

(1) 標本の大きさおよび標本平均と標本 (不偏) 分散の実現値をそれぞれ記せ.

(2) 母分散 σ^2 が 2.0 であるとして, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(3) 母分散 σ^2 を未知として, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 が 2.0 であるとして, μ が 15.1 より大きいと言えるかどうか (仮説 H_0: $\mu = 15.1$ を対立仮説 H_1: $\mu > 15.1$ に対して) 有意水準 5% で検定せよ. また, 有意水準 1% ではどうか.

[9] ある正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の実現値が次の表に示されている:

3.2	4.8	3.8	4.9	4.0	3.7	4.1	4.3

(1) 標本の大きさおよび標本平均と標本 (不偏) 分散の実現値をそれぞれ記せ.

(2) 母分散 σ^2 が 2.0 であるとして, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(3) 母分散 σ^2 を未知として, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 が 2.0 であるとして, μ が 5.0 より小さいと言えるかどうか (仮説 H_0: $\mu = 5.0$ を対立仮説 H_1: $\mu < 5.0$ に対して) 有意水準 5% で検定せよ. また, 有意水準 1% ではどうか.

[10] ある正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ 5 の標本 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の実現値が次の表に示されている:

3.5	3.7	3.6	4.3	2.9

(1) 標本平均 $\overline{X}$ および不偏分散 V の定義式と実現値をそれぞれ記せ.

(2) 母分散 σ^2 が 0.20 であるとして, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(3) 母分散 σ^2 を未知として, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 は 0.1 より大きいと言えるか. H_1: $\sigma^2 > 0.1$ に対して, H_0: $\sigma^2 = 0.1$ を有意水準 5% で検定せよ. また, 有意水準 1% ではどうか.

(5) 母分散 σ^2 を未知として, 仮説 H_1: $\mu \neq 3.0$ に対して, 仮説 H_0: $\mu = 3.0$ を有意水準 5% で検定せよ.

[11] ある正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ の実現値が次の表に示されている：

6.6	5.5	7.2	6.7	5.6	6.4	6.3	6.1

(1) 標本平均 $\overline{X}$ および不偏分散 U^2 の定義式を与えよ（$X_1, X_2, \cdots, X_8$ を用いて表せ）.

(2) 標本の大きさ n および $\overline{X}$ の実現値 $\overline{x}$ と U^2 の実現値 u^2 をそれぞれ求めよ.

(3) 母分散 σ^2 が 0.18 であるとして, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 を未知として, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(5) 母分散 σ^2 が 0.18 であるとして, μ が 6.0 より大きいと言えるかどうか（仮説 H_0：$\mu = 6.0$ を対立仮説 H_1：$\mu > 6.0$ に対して）有意水準 5% で検定せよ. また, 有意水準 1% ではどうか.

[12] ある正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ の実現値が次の表に示されている：

10.9	9.5	9.3	11.7	10.1

(1) 標本平均 $\overline{X}$ および不偏分散 U^2 の定義式を与えよ（$X_1, X_2, \cdots, X_5$ を用いて表せ）.

(2) 標本の大きさ n および $\overline{X}$ の実現値 $\overline{x}$ と U^2 の実現値 u^2 をそれぞれ求めよ.

(3) 母分散 σ^2 が $5/4 = 1.25$ であるとして, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(4) 母分散 σ^2 を未知として, 母平均 μ に対する 95% 信頼区間を求めよ.

(5) 母分散 σ^2 が $5/4$ であるとして, μ が 9.5 より大きいと言えるかどうか（仮説 H_0：$\mu = 9.5$ を対立仮説 H_1：$\mu > 9.5$ に対して）有意水準 5% で検定せよ. また, 有意水準 1% ではどうか.

[13] ある製品の説明書に, その製品の重量の平均 μ は 100.0g であると書かれている. この製品の中から 25 個を無作為に抜き取り, 重量を測定したところ, 平均 105.0, 分散 148.2 であった.
重量の平均 μ は説明書どおりであると言えるか有意水準 5% で検定せよ. また, 帰無仮説が棄却された場合は, μ の信頼度 95% の信頼区間を求めよ. ただし, 標準偏差は $\sigma = 12.0$ である事が, 事前にわかっているものとする. (必要ならば, $z(0.05) = 1.645$, $z(0.025) = 1.96$, $z(0.005) = 2.578$ を用いよ.)

[14] ある製造メーカーでは, 直径 12 (mm) のギアを製造している. 最近, 製造工場が中程度の地震に見舞われたため, 製造ラインの点検を行った後, 製造を再開した. 製品の品質に変化がないことを確認するため, 20 個のギアを標本として抽出し, その直径を測定したところ, 平均は $\overline{x} = 13.1$, 不偏分散は $u^2 = 5.0$ であった. ギアの直径は正規分布に従うとして, ギアの直径が規格通りであるかどうかを有意水準 5% で検定せよ.

[15] ある製薬会社の風邪薬 A には, 成分 C が含まれている. これまでのデータでは, 風邪薬 A 1 箱当りの成分 C の含有量 $(m\ell)$ の分散は 4^2 であった. この製薬会社では, 今年, 風邪薬 A の生産機械を最新のものに交換した. このため, 今年 生産された 風邪薬 A 1 箱当りの成分 C の含有量 X $(m\ell)$ の分散 σ^2 は, 従来よりも小さくなることが期待される. これを確認するため, 今年生産された風邪薬 A から 15 箱を抽出し, 成分 C の含有量を測定したところ, その分散は $s^2 = 2.5^2$ であった. X は正規分布に従うものとして, 分散が以前よりも小さくなったといえるか, 有意水準 5% で検定せよ.

[16] 正規分布をしているある母集団から 15 個の標本をランダムに選び出したところ, 標本平均は 102.35, 標本分散は 16.9400 であった.

(1) この標本の不偏分散はいくらか.

(2) 母集団の平均を信頼度 95% で区間推定せよ.

(3) この母集団の母平均が実は 100.00 であるという. それは正しいか, 有意水準を 5% として検定せよ.

[17] 正規分布をしているある母集団の平均が 100.00 であるという. ところが実際には平均が大きくなっているのではないかという疑いがある. 大きくなっていては困るので, 本当に大きくなっているかどうかを 17 個の標本をランダムに選んで検定する. すると標本平均は 102.5, 標本標準偏差は 5.6 であった. 有意水準を 5% としての片側検定で, 平均は大きくなっているといえるか判定せよ.

[18] $\sigma^2 > 0$ で, $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, すべてが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, この n 個の標本を利用して有意水準 5% で統計的検定を行う.

(1) $X_1, \ldots, X_n$ は, ある会社が作った電球の同一ロットから抜き出した n 個の標本の寿命を表す. 分散が σ^2 であることは, 事前にわかっている. この会社は, 電球の寿命は μ_0 と公称している. このロットを出荷するかどうか検定する手順を説明せよ.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ は, ある機械で一日に製造しているボール・ベアリングの直径を表す. 分散が σ_0^2 を超えたら, 一日の終わりに機械を検査する必要がある. 期待値 μ は未知である. 検査するかどうか検定する手順を説明せよ.

[19] ある工場では, 一日の終わりに, その日作った夥しい製品から n 個を抜き出して検査し, その結果を見て, その日の製品を出荷するか, 廃棄するかを決めている. 検査値 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, すべてが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. $0 < \sigma^2 < \infty$ を仮定する.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2, \qquad U_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2$$

という記号をつかう. $\dfrac{n-1}{\sigma^2}U_n^2$ が χ^2_{n-1} に従うことを前提として, この問題を解いてよい.

次の (1), (2) それぞれの場合に, 出荷の可否を有意水準 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ で統計的に検定する手順を説明せよ.

(1) $X_1, \ldots, X_n$ はリチウム二次電池の容量をあらわす. この工場では, 容量の平均値は μ_0 と公称している.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ は温度ヒューズが溶断する温度をあらわす. この工場では, 当該温度の平均値は μ_0 と公称している.

10. 応用幾何

10.1 空間ベクトル

[1] xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(0,1,1)$, $\mathrm{B}(-1,0,1)$, $\mathrm{C}(1,0,0)$ を通る平面を π とする.

(1) 2 点 A, B を通る直線 ℓ のパラメータ表示および方程式を与えよ.

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ および外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ を求めよ. また, 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 平面 π の方程式を求めよ. また, 原点 O の平面 π への正射影 P の座標を求めよ.

[2] xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(-1,0,2)$, $\mathrm{C}(-1,-2,0)$ を通る平面を π とする.

(1) 2 点 A, B を通る直線 ℓ のパラメータ表示および方程式を与えよ.

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ および外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ を求めよ. また, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の成す角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ.

(3) 平面 π の方程式を求めよ. また, 原点 O と平面 π の距離を求めよ.

[3] 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ がある. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよ.

10.2 空間曲線と線積分

[1] 曲線 C は xy 平面内の, 原点が中心で半径が 1 の円周の内の $x \leqq 0$ の部分とする. ただし, C の向きは時計まわりとする (すなわち, C の始点は $(0,-1)$, 終点は $(0,1)$ である). C のパラメーター表示を 1 つ与えよ.

[2] 次の曲線の与えられた点における接線, 法平面, 接触平面, 曲率, 捩率を求めよ.

(1) 曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (3t, 3t^2, -2t^3)$ の $t = 1$ で与えられる点.

(2) 曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (e^{-t}, e^t, t)$ の $t = 0$ で与えられる点.

[3] xyz 空間の曲線 $C\colon \boldsymbol{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$ $(-\infty < t < \infty)$ $(a, b > 0$: 定数$)$ に関して以下の問に答えよ:

(1) 点 $\boldsymbol{x}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ における C の接線の方程式を求めよ.

(2) 曲線の長さ関数 $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|\,dt$ 及び C の弧長パラメータ表示 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ を求めよ.

(3) 単位接ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$ を求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描き, ベクトル $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ を書き込め.

(4) 曲率 $\kappa(s)$, 捩率 $\tau(s)$ を求めよ.

[4] 次の各文章の $\boxed{}$ の中に適当な式・用語を記せ.

(1) $\boldsymbol{x}(s)$ を曲線 C の弧長パラメータ表示とするとき, フルネ・セレーの公式は次で与えられる: $\boxed{}$.

(2) 2 曲線 C_1, C_2 について: C_1, C_2 が向きを保つ合同変換で写り合う $\Longleftrightarrow$ $\boxed{}$.

(3) 曲線 C について: (i) 曲率 $\kappa \equiv 0 \Longleftrightarrow \boxed{}$, (ii) 捩率 $\tau \equiv 0 \Longleftrightarrow \boxed{}$.

(4) 曲率, 捩率が共に定数 $(\neq 0)$ の曲線は $\boxed{}$ である.

[5] スカラー場 F は, xyz 空間全体で定義されていて, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して実数 $f(x, y, z)$ を対応させているものとする. ただし, 関数 f は偏微分可能で, 偏導関数は連続であるとする. C を空間内の曲線とし, F の勾配 $\operatorname{grad} F$ の C に沿っての接線線積分を I とする.

(1) I を関数 f の偏導関数を用いた線積分として表せ. (答えのみ記せ.)

(2) C のパラメーター表示が $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ で与えられているものとする. ただし, 関数 $x(t), y(t), z(t)$ は微分可能で, 導関数は連続であるとする. I を t に関する定積分として表せ. (答えのみ記せ.)

(3) C の始点を P_0, 終点を Q_0 とするとき, I を F, P_0, Q_0 のみを用いて表せ.

[6] $f(x, y, z)$ を領域 V 上のスカラー場とする. V 内の点 A から点 B にいたる曲線 C に対して, 次の等式が成り立つ事を示せ: $\displaystyle\int_C \operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{x} = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})$.

[7] 閉曲線 $C\colon \vec{r} = \vec{r}(s) = \left(\cos s, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin s\right)\ (0 \leqq s \leqq 2\pi)$ を考える.

(1) 単位接線ベクトル $\vec{t}(s)$, 主法線ベクトル $\vec{n}(s)$, 従法線ベクトル $\vec{b}(s)$ をそれぞれ求めよ.

(2) C の曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\vec{A} = (y + z, y - x, z - x)$ の C に沿った接線線積分 $\displaystyle\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ を求めよ.

[8] 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}, 0, 0)$ を始点とし, 点 $\mathrm{Q}(0, 0, 1)$ を通り, 点 $\mathrm{R}(-\sqrt{3}, 0, 0)$ を終点とする曲線 C はその曲率 κ が一定で捩率が 0 であるとする.

(1) C はどのような曲線であるかを説明せよ. また, そのときの曲率 κ の値を求めよ.

(2) 曲線 C のパラメータ表示を与え, ベクトル場 $\vec{A} = (xy - z, zxe^y, x - yz)$ の C に沿った接線線積分 $\displaystyle\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ.

[9] (1) $C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)\ (a < t < b)$ を滑らかな空間曲線 とする.

(i) $\boldsymbol{x}''(t) \mathbin{/\!/} \boldsymbol{x}(t)\ (a < t < b)$ のとき, $\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{v}$ (定ベクトル) となることを示せ.

(ii) 曲線 C の曲率が $\kappa(t) = \dfrac{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{x}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^3}$ で与えられることを示せ.

(2) 空間曲線 $C\colon \boldsymbol{x}(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\right)$ $(t \in [0,1])$ を考える.

(i) 曲線 C の長さを求めよ.

(ii) 曲線 C の曲率 $\kappa(t)$ を求めよ.

(iii) 曲線 C に沿うベクトル場 $\boldsymbol{v} = (y, x, xz)$ の線積分 $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$ を求めよ.

10.3 空間曲面

[1] 平面 $\alpha\colon x + y + z = 0$ のパラメーター表示を 1 つ与えよ. ただし, パラメーターは u, v を用い, そのパラメーター表示によって定まる α の単位法ベクトルが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ となるようにせよ.

[2] 曲面 S がパラメーター表示 $x = u,\ y = v,\ z = g(u,v)$ によって与えられている. ただし, 2 変数関数 g は偏微分可能で, 偏導関数は連続とする. S の単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする. このとき, g の偏導関数等を用いて, $\boldsymbol{n}$ の成分表示を求めよ.

[3] 曲面 $x^2y + y^2z + z^2x = 7$ の $(1,2,1)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

[4] xyz 空間の円柱面 $S\colon x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$, $-\infty < z < \infty$ に関して, 以下の問に答えよ.

(1) S の円柱座標によるパラメータ表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta, z)$ に関して次を求めよ:

基本ベクトル $\boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_z$,　外積 $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_z$,　単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$,　面素 dS,　ベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$

(2) 曲面 S の概形を描き, θ 曲線, z 曲線, 及び, ベクトル $\boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_z, \boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_z, \boldsymbol{n}$ を書き入れよ.

[5] xyz 空間の球面 $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ に関して, 以下の問に答えよ. 但し, 外側を表とする.

(1) xyz 空間の極座標 (r, θ, ϕ) の定義を記せ (図示せよ).

(2) 球面 S の極座標によるパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta, \phi)$ を記せ.

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_\theta = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}$, $\boldsymbol{r}_\phi = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}$, 外積 $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi$, 正の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 面積素 dS を求めよ.

(4) 球面 S を描き, θ 曲線, ϕ 曲線, 及び, ベクトル $\boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_\phi, \boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi$ を書き入れよ.

[6] xy 平面上の関数 $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ のグラフを S で表す. 但し, z 軸の正の方向を表とする.

(1) S の自然なパラメータ表示 $S\colon \boldsymbol{x} = (x, y, f(x,y))$ $((x,y) \in \mathbf{R}^2)$ を考える.

(i) 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$, 外積 $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y$, 面積素 dS を求めよ.

(ii) グラフ S の概形を描き, x 曲線, y 曲線, 及び, ベクトル $\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y, \boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y$ を書き入れよ.

(2) S 上の 閉曲線 $C\colon \boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t, f(\cos t, \sin t))$ $(0 \le t \le 2\pi)$ を考える.

(i) 速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(t)$, 加速度ベクトル $\boldsymbol{x}''(t)$ を求めよ.

(ii) 点 $\boldsymbol{x}\!\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ における C の接線の方程式を求めよ.

(iii) 曲率 $\kappa(t) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)\|}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|^3}$ を求めよ.

[7] 次の曲面 $\boldsymbol{x}(u,v)$ の与えられた点における偏微分係数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$, 単位法線ベクトル, 接平面の方程式, 法線の方程式, 第1基本量 E, F, G を求めよ.

(1) 曲面 $\boldsymbol{x}(u,v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3u^2 - 3v^2)$ の $\boldsymbol{x}(2,1) = (4, -14, 9)$ で与えられる点

(2) 曲面 $\boldsymbol{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^3 + v^2)$ の $\boldsymbol{x}(1,0) = (1,0,1)$ で与えられる点

[8] xy 平面の領域 $D\colon x^2 + y^2 \leq 1$ と D 上の滑らかな関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2 - x^2 + y^2$ を考える. f のグラフを S で表す. S は空間の滑らかな曲面になる. 但し, S の向きは, z 軸の正の方向を表とする. S の自然な正のパラメータ表示 $S\colon \boldsymbol{x} = (x, y, f(x,y))$ $((x,y) \in D)$ を考える.

(1) (i) グラフ S の概形を描き, x 曲線, y 曲線を書き入れよ.

(ii) 次の量を求めよ:

(a) 基本ベクトル $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}$, $\boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}$, (b) 外積 $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$, (c) 単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n}$,

(d) 第一基本量 E, F, G, (e) 面積素 dS

(iii) 曲面 S の面積を求めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (y, x, z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$ を求めよ.

10.4 スカラー場・ベクトル場

[1] (1) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は, 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}) = (x^3 + yz, -x + 2y, x^2y + 3z^2)$ を対応させているものとする. このとき, 点 $\mathrm{P}_0(2,1,-1)$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ の値を求めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は, 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}) = \left(\dfrac{x}{r^m}, \dfrac{y}{r^m}, \dfrac{z}{r^m}\right)$ を 対応させているものとする. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で m は正の定数である. ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を求めよ.

[2] xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 及び スカラー場 $r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に対して, $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, $\Delta \dfrac{1}{r}$ 及び $\operatorname{div} \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ を求めよ.

[3] xyz 空間上のスカラー場 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ に対して次の問に答えよ.

(1) $\operatorname{grad} f$ 及び $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ を求めよ.

(2) 任意の点 $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ に対して, ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ の積分曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$ を満たすものを求めよ.

(3) xyz 空間に, 次の概形を (同時に) 描け:

(i) 等位面 $S_c\colon f(x,y,z) = c$ $(c = -1, 0, 1)$

(ii) 積分曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌道 (いくつかの初期条件 $\boldsymbol{a}$ に対して軌道を描き, 軌道の分布の様子が分かる様にせよ.)

[4] 空間において, 原点 O を通る直線 ℓ のまわりの角速度 ω (一定) の回転運動を考える. この回転運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は, 長さ $\|\boldsymbol{\omega}\| = \omega$, 向きは ℓ と平行で, この回転で右ねじの進む方向のベクトルとして定義される.

(1) 空間内の点 P におけるこの回転運動の速度ベクトルが $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ で与えられることを示せ. ただし, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ である.

(2) この回転運動の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に関して, 次が成り立つことを示せ: $\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$

[5] 次のスカラー場 f とベクトル場 $\overrightarrow{A}$ に対して

$$\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{rot}\overrightarrow{A}, \qquad \operatorname{div}\overrightarrow{A}, \qquad \operatorname{div}(f\overrightarrow{A})$$

を求めよ.

(1) スカラー場 $f = x^2yz^2$ とベクトル場 $\overrightarrow{A} = (xy, y^2, -yz)$.

(2) スカラー場 $f = x^2 + y^2 + z^2$ とベクトル場 $\overrightarrow{A} = (yz, zx, xy)$.

[6] 次のベクトル場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と関数 $f(x, y, z)$ に対して

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}), \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

を求めよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{u} = (2y, 2z, 4x + z)$, $\boldsymbol{v} = (3z^2, 2x^2 - y^2, y^2)$ と関数 $f(x, y, z) = xy - yz$.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{u} = (z, -x, y)$, $\boldsymbol{v} = (y, z, -x)$ と関数 $f(x, y, z) = xyz$.

[7] スカラー場 f 及び ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して, 次の等式を示せ:

(1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ (2) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \boldsymbol{v}\rangle + f \operatorname{div}\boldsymbol{v}$ (3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \Delta\boldsymbol{v}$

[8] $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ が空間における x, y, z, t のベクトル値関数で次の等式を満たしているとする:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (c: \text{ 定数})$$

このとき $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ が次の方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\boldsymbol{E} \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\boldsymbol{H}$$

[9] (1) xyz 空間上のベクトル場 $\overrightarrow{A} = (yz^2e^x - y,\ z^2e^x - x,\ 2yze^x)$ に対して $\overrightarrow{A} = \operatorname{grad} f$ となるスカラー場 f が存在するかどうかを理由とともに述べよ. さらに, 存在する場合はそのような f をひとつ求めよ.

(2) xyz 空間上のベクトル場 $\overrightarrow{A} = (xe^y,\ -xye^z,\ xe^z - ze^y)$ に対して $\overrightarrow{A} = \operatorname{rot}\overrightarrow{X}$ となるベクトル場 $\overrightarrow{X}$ が存在するかどうかを理由と共に述べよ. さらに, 存在する場合はそのような $\overrightarrow{X}$ を一つ求めよ.

[10] ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}) = (ay^2 + bxz, -2xy + cz^2, 2x^2 + 4yz)$ を対応させているものとする. ただし, a, b, c は定数である. 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ を求めよ. また, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる a, b, c の値を求めよ.

(2) (1) のように a, b, c を定めたとき, ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルをひとつ求めよ.

10.5 面積分・積分定理

[1] 次の各場合にスカラー場の面積分 $\displaystyle\int_S f\,dS$ を求めよ.

(1) $f(x,y,z)=x^2+y^2$ $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ (球面)

(2) $f(x,y,z)=(x+y)\,z$ S: 関数 $z=\sqrt{2xy}$ $(0\leq x,y\leq 1)$ のグラフ

[2] 球面 $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ の $z\geq 0$ の部分を S_+ で表す.

(1) スカラー場 $f(x,y,z)=x^2$ の S_+ に沿う面積分 $\displaystyle\int_{S_+} f\,dS$ を求めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(-y,x,z)$ の S_+ に沿う面積分 $\displaystyle\int_{S_+}\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ.

[3] 次の曲面 S に沿うベクトル場 $\overrightarrow{A}=(yz,zx,xy)$ の法線面積分 $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}$ の値を求めよ.

(1) $S\colon x^2+y^2+z^2=1,\ x,\ y,\ z\geq 0$ (外側が表)

(2) S: 関数 $z=xy$ $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$ のグラフ (S の向きは正の法線ベクトルが z 軸の正方向と鋭角をなすように定める).

[4] xyz 空間の円柱 $V\colon x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1$ の境界面 $S=\partial V$ を考える. ベクトル場 $\boldsymbol{A}=(2xy^2,xz,z^2)$ の曲面 S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ.

[5] S を原点を中心とする半径 1 の球面とする (S の向きは球の外側を正と定める). ベクトル場 $\overrightarrow{A}=(yz,zx,xy)$ の球面 S に沿う法線面積分 $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}$ の値を求めよ.

[6] $\alpha,\beta,\gamma>0$ とする. ガウスの発散定理を用いて, ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(\alpha x,\beta y,\gamma z)$ の球面 $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ に沿う面積分 $\displaystyle\int_S\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ.

[7] 滑らかな閉曲面 S で囲まれた領域 V の体積が v であるとする. ベクトル場 $\overrightarrow{A}=(x,-2y,3z)$ の曲面 S に沿う法線面積分 $\displaystyle\oint_S \overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{S}$ の値を v を用いて表せ.

[8] V を空間の有界閉領域とし, その境界 $S=\partial V$ は区分的に滑らかとする. $\boldsymbol{n}$ を S の外向きの単位法線ベクトル場とする. V の体積を v とするとき, ベクトル場 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ.

[9] 空間にベクトル場 $\boldsymbol{v}=(3y,5-2x,z^2-2)$ がある.

(1) ガウスの発散定理を用いて, 球 $S=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=9\right\}$ に沿う $\boldsymbol{v}$ の外法線 (半径増大方向) 面積分を求めよ.

(2) ストークスの定理を用いて, 下半球 $S=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=9,\ z\leq 0\right\}$ に沿う $\boldsymbol{v}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ の外法線 (半径増大方向) 面積分を求めよ.

[10] ベクトル $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$ に対してベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}$ を考える.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ を図示せよ.

(2) xy 平面上の関数 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ のグラフを S で表す. 但し, z 軸の正の方向を表とする. S 上の 閉曲線 $C\colon \boldsymbol{x}(t) = (\cos t, \sin t, f(\cos t, \sin t))$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を考える.

(i) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} \rangle$ を求めよ.

(ii) グラフ S の単位円板 $D\colon x^2+y^2 \leq 1$ の上の部分を S_1 で表す $\bigl(S_1 = \bigl\{\, (x, y, f(x, y)) \bigm| (x, y) \in D \,\bigr\}\bigr)$. ベクトル場 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ の S_1 に沿う面積分 $\displaystyle\int_{S_1} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle$ を求めよ.

[11] ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}) = \left(\dfrac{-y}{r^m}, \dfrac{x}{r^m}, 0\right)$ を対応させているものとする. ただし, r は P と z 軸との距離, 即ち $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で, m は正の定数である. ($\boldsymbol{v}$ は z 軸を除いた領域で定義されている.) このとき, 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ を求めよ. また, $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる m の値を求めよ.

(2) C を xy 平面内のなめらかな (自分自身と交わらない) 閉曲線とする. また, その向きは反時計回り (内部を左側に見る向き) とする. (1) のように m を定めたとき, ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の C 上での接線線積分の値を以下の場合に求めよ. (ヒント: ストークスの定理.)

(a) 原点が C の外部にある場合. (b) 原点が C の内部にある場合.

[12] xyz 空間において, ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ $\left(\boldsymbol{x} = (x, y, z),\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ を考える.

(1) $\operatorname{div} \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} = 0$ を示せ.

(2) 原点 O を中心とする半径 $a > 0$ の球面を S_a で表す (外側を表とする). 面積分 $\displaystyle\int_{S_a} \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle$ を求めよ.

(3) V を空間の有界閉領域とし, その境界 $S = \partial V$ は区分的に滑らかとする (S の向きは, V の外側を表とする). 原点 O が V の内部にあるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}, d\boldsymbol{S} \right\rangle$ を求めよ.

[13] V を空間の有界閉領域とし, その境界 $S = \partial V$ は滑らかな閉曲面であるとする. S の向きは, V の外側を表とする. f, g を V を含む開集合上で定義された C^2 級関数とする. 次の等式が成り立つ事を示せ.

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dS = \int_V f \Delta g \, dV + \int_V \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, dV.$$

但し, S 上の関数 $\dfrac{\partial g}{\partial n}$ は, S の各点 $\boldsymbol{x}$ における S の表向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ による関数 g の方向微分により定義される. $\dfrac{\partial g}{\partial n} = \langle \operatorname{grad} g, \boldsymbol{n} \rangle$ が成り立つ.

[14] ガウスの発散定理を (設定・条件を含めて) 正確に記せ.

[15] 次の各文章の $\boxed{}$ の中に適当な式・用語を記せ.

(1) $\boldsymbol{A}$ を定常流の速度ベクトル場とするとき, ガウスの発散定理 $\boxed{} = \boxed{}$ において, 左辺は $\boxed{}$ を表し, 右辺は $\boxed{}$ を表す.

(2) 微分 2 形式 $\omega = \boxed{}$ に対して, 外微分は $d\omega = \boxed{}$ で与えられ, 微分 2 形式 に関してガウスの発散定理は 次の形になる: $\boxed{}$.

(3) V が 2 つの関数 $\phi_1(x,y) \leq \phi_2(x,y) \quad ((x,y) \in D)$ で挟まれた領域 の場合, 微分積分学の基本定理より次式を得る: $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdydz = \boxed{}$.

(4) S が関数 $z = \phi(x,y) \quad ((x,y) \in D)$ のグラフ (上側が表) の場合, 面積分の定義より次式を得る:
$\displaystyle\int_S f\,dx \wedge dy = \boxed{}$.

[16] xyz 空間の球面 $S_a\colon x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a>0)$ を考える. 但し, 外側を表とする.

(1) スカラー場 $r = \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に対して, 次の量を求めよ:

(i) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ (ii) $\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}$ (iii) $\Delta\,\dfrac{1}{r}$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ を考える.

(i) S_a の点 $\boldsymbol{x}$ における正の単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(ii) 面積分 $\displaystyle\int_{S_a} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ.

(iii) 立方体 $V\colon -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1$ の表面 ∂V を考える. 但し, 外側を表とする. 面積分 $\displaystyle\int_{\partial V} \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ を求めよ.

(3) スカラー場 $h(x,y,z) = x^2 - y + e^z$ を考える.

(i) $\mathrm{grad}\,h$ を求めよ.

(ii) 等位面 $h(x,y,z) = e$ の点 $p = (1,1,1)$ における接平面を求めよ.

(iii) 面積分 $\displaystyle\int_{S_a} h\,dS$ を求めよ.

[17] f, g を空間の開集合 U 上で定義された C^2 級関数とする.

(1) 次の等式が成り立つ事を示せ:

(i) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{0}$ (ii) $\mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g) = \langle \mathrm{grad}\,f, \mathrm{grad}\,g\rangle + f\Delta g$

(2) V を U に含まれる有界閉領域とし, その境界 $S = \partial V$ は滑らかな閉曲面であるとする. S の向きは, V の外側を表とする. S 上の表向きの単位法線ベクトル場を $\boldsymbol{n}$ で表す.

(i) S 上の関数 $\dfrac{\partial g}{\partial n}\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ は, S の各点 p で関数 g のベクトル $\boldsymbol{n}(p)$ による方向微分をとることにより定義される. 次の等式を示せ: $\dfrac{\partial g}{\partial n} = \langle \mathrm{grad}\,g, \boldsymbol{n}\rangle$

(ii) ガウスの発散定理を用いて次の等式を示せ:

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n}\,dS = \int_V f\Delta g\,dV + \int_V \langle \mathrm{grad}\,f, \mathrm{grad}\,g\rangle\,dV$$

(3) 定常流の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対してガウスの発散定理 を考える.

(i) ガウスの発散定理を設定・条件を含めて正確に記せ.

(ii) 点 p における $\mathrm{div}_p\boldsymbol{v}$ の意味を簡潔に説明せよ.

(iii) ガウスの発散定理の等式の両辺の意味を簡潔に説明せよ.

11. 応用解析

11.1 1階常微分方程式

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ:

(1) $xyy' = 1 + y^2 \quad (x > 0)$ (2) $y' = xy^2$ (3) $y' + \dfrac{1}{x}y = 1 \quad (x > 0)$

(4) $2xy' + 3y = (1+x)^2$ (5) $xy' = y(1-y^2)(2-x)$

[2] 次の微分方程式を解け.

(1) $1 + x^2y' = y$ (2) $x^2y' = (3y - 5x)y$ (3) $y' = -3y + x$ (4) $2xy' + 3y = \dfrac{x^2}{1+x^2}y^3$

[3] 次の初期値問題を解け.

(1) $\begin{cases} y' + \dfrac{2x}{x^2+1}y = x \\ y(0) = -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{3x}y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

[4] (1) 微分方程式 $x^2y' = 2 + 3y$ の一般解を求めよ. (2) 初期値問題 $\begin{cases} y' - 2y = 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ を解け.

[5] 微分方程式 $(*)$: $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $(*)$ は $y = \dfrac{1}{x}$ を解に持つことを示せ.

(2) 方程式 $(*)$ において, $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{u}$ (u は $u \neq 0$ なる x の関数) とおくと, u はある一階線形微分方程式を満たす. その微分方程式を求めよ.

(3) $x > 0$ における方程式 $(*)$ の解で, 条件 $y(1) = 0$ を満たすものを求めよ.

[6] 次の微分方程式の一般解 (及び特異解) を求めよ.

(1) $y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}}$ (2) $\sin y + \big(x(\cos y) + 2y\big)y' = 0$ (3) $y = xp + 2p - p^2 \quad (p = y')$

[7] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) (ロジスティック方程式) (i) $y' = y(1-y)$ (ii) $y' = ay(1-y)$

(2) (1階線形) $y' + f'(x)y = f'(x)$ (3) (同次形) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

(4) (完全微分形) (i) $\sin y\,dx + (x\cos y + e^y)\,dy = 0$ (ii) $(2x + e^x \sin y)\,dx + (e^x \cos y + 3y^2)\,dy = 0$

11.2　2階常微分方程式

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ. 但し, ω は実定数である.

(1) $y'' + y' - 6y = 0$　(2) $y'' - 4y' + 4y = x + 1$　(3) $y'' - 2y' + y = e^x$

(4) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$　(5) $y'' - 2y' + 3y = \sin x$　(6) $y'' + y' - 2y = \cos 2x$

(7) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\sin 2x$　(8) $y'' + y = \cos\omega x$　(9) $y'' + y = e^{i\omega x}$

[2] 初期値問題 $y'' - 6y' + 9y = 18x - 3,\quad y(0) = 1,\, y'(0) = 4$ を解け.

[3] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y^2 y'' + 2 = 0$

(2) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$　(e^x が 1 つの解である事に注意して, $y(x) = e^x z(x)$ とおけ)

(3) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$　($y = e^x$ は 1 つの解. $y = e^x u$ と置け)

(4) $yy'' - (y')^2 - (\cos x)y^2 = 0$　($y(x) = c\,e^{u(x)}$ と置け)

(5) $yy'' - 2(y')^2 - yy' = 0$　($y(x) = e^{u(x)}$ と置き, u' を求めよ)

(6) $x^2 y'' - xy' + y = x^2\quad (x > 0)$

(オイラー型 の 微分方程式 であることに注意して, 変数変換 $x = e^t$ を用いよ.)

[4] (1) $q(x)$ は与えられた x の関数とする.

$$y = \sin x \int q(x)\cos x\, dx - \cos x \int q(x)\sin x\, dx$$

とおくと y は関係式 $y'' + y = q(x)$ を満たすことを示せ.

(2) 微分方程式 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を解け.

[5] 次の微分方程式を考える.　$y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin(3x)\qquad (*)$

(1) 関数 $y(x) = u(x)e^{-x}$ が $(*)$ を満たすとき, $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(2) 微分方程式 $(*)$ を解け.

[6] (1) $q(x)$ は与えられた x の関数とする.

$$y = \sin x \int q(x)\cos x\, dx - \cos x \int q(x)\sin x\, dx$$

とおくと y は関係式 $y'' + y = q(x)$ を満たすことを示せ.

(2) 微分方程式 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を解け.

[7] 次の初期値問題を解け.　$\begin{cases} y'' + 4y = 8\sin 2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

[8] $x > 0$ における微分方程式 $x^2 y'' - 2y = 3x^2\quad (*)$ について, 次の問に答えよ.

(1) $x = e^t$ とおくとき, 方程式 $(*)$ を $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt},\ \ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ を用いて表せ.

(2) 方程式 $(*)$ の一般解を求めよ. 解 y は x の関数として表すこと.

(3) 方程式 $(*)$ の解で, 条件「$x = 1$ のとき $y = 0,\ y' = -2$」を満たすものを求めよ.

[9] 微分方程式: $(1-x)y'' + y' - (2-x)y = 0$ に関して, 以下の問に答えよ.

(1) $\varphi(x) = e^x$ が 1 つの解であることを示せ.

(2) $y(x) = e^x u(x)$ とおいて, $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) $u'(x)$ 及び $u(x)$ を求めよ.

(4) $y(x)$ の一般解を求めよ.

[10] 次の 2 階線形微分方程式を考える. ($P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ は区間 $[a,b]$ 上の連続関数である.)

$$(*)\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

$$(**)\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

(1) $W(x)$ を方程式 $(**)$ の 2 つの解 $\phi(x)$, $\psi(x)$ のロンスキアンとする. 次の等式を示せ.

$$W(x) = W(c)\exp\left(-\int_c^x P(s)\,ds\right) \qquad (c \in [a,b])$$

(2) 方程式 $(**)$ の基本解系 $\phi(x)$, $\psi(x)$ の定義を述べよ.

(3) $\phi(x)$, $\psi(x)$ を方程式 $(**)$ の基本解系とする. このとき, 方程式 $(*)$ の一般解が次式で与えられることを定数変化法を用いて示せ:

$$y(x) = c_1\phi(x) + c_2\psi(x) + \int_c^x \frac{\phi(s)\psi(x) - \phi(x)\psi(s)}{W(s)} R(s)\,ds \qquad (c_1,\ c_2\text{: 任意定数})$$

[11] 次の 2 階線形微分方程式を考える. ($p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上の連続関数である.)

$$(*)\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

$$(**)\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

(1) 方程式 $(*)$ の初期値問題に関する「解の存在と一意性定理」を述べよ.

(2) 方程式 $(**)$ の基本解系の定義を述べよ.

(3) 「解の存在と一意性定理」を用いて基本解系の存在を示せ.

[12] ある球を高い場所に持ち上げ, 時刻 0 に静かに手を離して空気中を落下させた. 時刻 t までに球が落下した距離を $x = x(t)$ とするとき, 空気抵抗を考慮すると $x(t)$ は微分方程式

$$\ddot{x} = 10 - 0.1(\dot{x})^2, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

を満たすという. ただし, 記号 $\dot{}$ は時間 t に関する微分を表す.

(1) $v(t) = \dot{x}(t)$ とおくとき, $v(t)$ の満たす微分方程式を求め, $v(t)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t)$ を求めよ.

(3) $x(t)$ を求めよ.

11.3 高階線形常微分方程式

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ. 但し, 特殊解は演算子法を用いて求めよ.

(1) $y''' + y'' - 2y = e^x$ (2) $y''' + y'' + y' + y = x^2$ (3) $y''' + y'' - y' - y = e^{2x}$

(4) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x$

[2] 微分演算子 $P(D) = D^3 - 3D^2 + 4D - 2$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $P(D)\,y = 0$ の基本解系を求めよ.

(2) 次の方程式の特殊解を (演算子法を用いて) 求めよ.

(i) $P(D)\,y = e^{2x}$ (ii) $P(D)\,y = e^x\,x^2$ (iii) $P(D)\,y = \sin x.$

[3] 微分演算子 $P(D) = D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $P(D)\,y = y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$ の基本解系を求めよ.

(2) 次の方程式の特殊解を (演算子法を用いて) 求めよ.

(i) $P(D)\,y = e^x$ (ii) $P(D)\,y = e^x\,x$ (iii) $P(D)\,y = \cos x.$

[4] (1) $P(D) = (D-1)^2(D^2 - 2D + 5)$ とし, 微分方程式 $P(D)y = e^{2x}$ — $(*)$ を考える.

(i) 特性根を求め, $(*)$ の 実標準基本解 を求めよ.

(ii) $(*)$ の 特殊解 $y_0 = \dfrac{1}{P(D)}e^{2x}$ を求めよ.

(iii) $(*)$ の 一般解 を求めよ.

(2) 次の関数を求めよ: (i) $\dfrac{1}{(D-2)(D^2-3D+3)}\,(e^{2x}\sin x)$ (ii) $\dfrac{1}{D(1-D+2D^2)}x^2$

[5] 多項式 $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ に対して, 次の微分演算子が定義される:

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right).$$

(1) $P(\lambda)$ が実多項式 ($a_1, \ldots, a_n$ が実数) の場合を考える.

(i) 複素数 $\mu = \alpha + \beta\,i$ が $P(\lambda)$ の根のとき, $\overline{\mu} = \alpha - \beta\,i$ も $P(\lambda)$ の根となる事を示せ.

(ii) $P(\lambda)$ が 実根 λ_1 (重複度 m_1), $\ldots,$ λ_k (重複度 m_k),
複素根 $\alpha_1 \pm \beta_1\,i$ (重複度 n_1), $\ldots,$ $\alpha_\ell \pm \beta_\ell\,i$ (重複度 n_ℓ)
を持つとき, 方程式 $P(D)\,y = 0$ の標準的な実基本解系を記せ (証明不要).

(2) 方程式 $P(D)\,y = f(x)$ ($f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上の連続関数) に対して, 『初期条件に関する解の存在と一意性定理』を述べよ (証明不要).

(3) 逆演算子 $\dfrac{1}{P(D)}$ の定義を記せ.

(4) 次の等式を示せ: (i) $\dfrac{1}{D^m}f(x) = \underbrace{\int\cdots\int}_{m} f(x)\,dx\cdots dx$ (m 回積分)

(ii) $\dfrac{1}{P(D)}\,(e^{\alpha x}f(x)) = e^{\alpha x}\dfrac{1}{P(D+\alpha)}f(x)$

(5) 次の等式を示せ: $\dfrac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \dfrac{1}{2a}x\sin ax$

[6] 微分作用素 $D = \dfrac{d}{dx}$ の 多項式 $P(D)$ 及び その逆作用素 $\dfrac{1}{P(D)}$ を考える.

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{P(D)}f(x)$ の定義を記せ. さらに, 等式 $\dfrac{1}{P(D)}f(x) = \cdots$ における等号の意味を記せ.

(2) 次の等式を示せ :

(i) $P(D)(e^{ax}f(x)) = e^{ax}P(D+a)f(x)$ (まず $P(D) = D$ の場合に示せ.)

(ii) $\dfrac{1}{P(D)}(e^{ax}f(x)) = e^{ax}\dfrac{1}{P(D+a)}f(x)$ ((a) を用いよ.)

(3) λ が 多項式 $P(z)$ の 重複度 $m\ (\geq 1)$ の 根 のとき, 次の等式が成り立つ事を示せ.

$P(D)(x^k e^{\lambda x}) = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, m-1)$ ((2)(a) を用いよ.)

[7] 次の 線形微分方程式 を考える.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad — \quad (*)$$
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad — \quad (**)$$

但し, $y = y(x)$ は 未知関数, $p_1(x), \cdots, p_n(x), f(x)$ は 区間 I 上の 与えられた 連続関数 である.

次の用語・命題について簡潔に説明せよ (証明不要).

(1) $(**)$ に関する “重ね合わせの原理”

(2) $(*)$ に関する “初期条件に対する大域解の存在と一意性”

(3) 基本解系 と その ロンスキアン $W(x)$

11.4 連立常微分方程式

[1] 次の 連立線形 微分方程式 を考える.

$$\begin{cases} 2y_1' + y_2' - y_2 = e^x \\ y_1' + y_2' + y_1 = 0 \end{cases} \quad — (*)$$

(1) 方程式 $(*)$ を 作用素 D を用いて表せ.

(2) $(*)$ から y_2 を 消去 して, y_1 のみの 微分方程式 を導き, y_1 の 一般解 を求めよ.

(3) $(*)$ の 一般解 を求めよ.

[2] 次の 連立線形 微分方程式 を考える.

$$\begin{cases} y_1' - 2y_2' + y_1 + y_2 = 0 \\ y_1' - y_2' - y_1 + y_2 = e^x \end{cases} \quad — (**)$$

(1) 方程式 $(**)$ を 作用素 D を用いて表せ.

(2) $(**)$ から y_1 を 消去 して, y_2 のみの 微分方程式 を導き, y_2 の 一般解 を求めよ.

(3) (**) の 一般解 を求めよ.

[3] (1) 行列の指数関数 e^{xA} を求めよ.

(2) 次の連立微分方程式を解け. (i) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 - 4y_2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2'' = y_1 - 4y_2 \end{cases}$

[4] 連立微分方程式 $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + 1 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 + 2 \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 平衡点を求め, その安定性を調べよ.

(2) 一般解 y_1, y_2 を求めよ.

[5] 次の 2 次正方行列 A に対して

(i) A の実 Jordan 標準型 及び (ii) 微分方程式 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の一般解 を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

[6] 次の連立線形 微分方程式について, 以下の問に答えよ. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}$ — (#)

(1) (#) を $\boldsymbol{y}'(x) = A\boldsymbol{y}(x)$ の形に表せ.

(2) 行列 A の 固有値・固有ベクトル を求めよ.

(3) A の Jordan 標準型 $J = P^{-1}AP$ を求めよ (正則行列 P も求めよ).

(4) J の 指数行列 e^{xJ} を記せ. (下記資料 参照)

(5) (#) の 一般解 $\boldsymbol{y}(x)$ を求めよ.

参考: 実 2 次正方行列 の 実 Jordan 標準形 J と その 指数行列 e^{xJ} の分類

J	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ($\lambda = \mu$ でもよい)	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
e^{xJ}	$\begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\mu x} \end{pmatrix}$	$e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ -\sin\beta x & \cos\beta x \end{pmatrix}$

[7] 次の 連立線形 微分方程式 について, 以下の問に答えよ. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 - 4y_2 \end{cases}$ — (*)

(1) 微分方程式 (*) を $\boldsymbol{y}'(x) = A\boldsymbol{y}(x)$ の形に表せ.

(2) (i) (1) の行列 A の Jordan 標準型 J を求めよ. (Jordan 標準型 を与える正則行列 P も求めよ.)

(ii) さらに J の 指数行列 e^{xJ} を記せ. (証明不要)

(3) (2) を用いて 微分方程式 (*) の一般解 $\boldsymbol{y}(x)$ を求めよ.

[8] 次の連立線形微分方程式について, 以下の問に答えよ.

$$(*)\quad \boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 A の実 Jordan 標準形を求めよ.

(3) 指数行列 e^{xA} を求めよ. さらに, 同次方程式 $\boldsymbol{y}'(x) = A\boldsymbol{y}(x)$ の基本解系を求めよ.

(4) 方程式 $(*)$ の特殊解を $\boldsymbol{y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の形で求め, さらに, $(*)$ の一般解 $\boldsymbol{y}(x)$ を求めよ.

[9] 次の連立線形微分方程式の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{cases} \ddot{u} = \omega^2(-2u + v) \\ \ddot{v} = \omega^2(u - 2v) \end{cases} \qquad (\omega > 0), \qquad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = v(0) = \dot{v}(0) = 0.$$

[10] 次の連立線形微分方程式を考える:

$$(*)\quad \boldsymbol{y}'(x) = A\,\boldsymbol{y}(x) \qquad \left(\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}\text{: } n \text{ 次実行列} \\ \boldsymbol{y}(x) = (y_j(x))_{1 \le j \le n}\text{: 未知 } n \text{ 次実ベクトル値関数} \end{array} \right)$$

A が n 次正則行列 P により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と対角化できるとする.

P の列ベクトルを $P = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおく.

(1) 方程式 $(*)$ から関数 $\boldsymbol{z}(t) = P^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導き, $\boldsymbol{z}(t)$ を求めよ.

(2) 方程式 $(*)$ の基本解系及び一般解を求めよ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を用いて表せ).

[11] n 次正方行列 A に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の指数行列 e^{xA} の定義を述べよ.

(2) 連立線形微分方程式 $\boldsymbol{y}'(x) = A\,\boldsymbol{y}(x)$ の一般解を指数行列 e^{xA} を用いて表せ.

(3) 次の等式を示せ: $\exp\left(x \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right) = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ -\sin \beta x & \cos \beta x \end{pmatrix}$

[12] 次の連立線形微分方程式に関して以下の問に答えよ:

$$(*)\quad \boldsymbol{y}'(x) = A\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} A = (a_{ij})\text{: } n \text{ 次実行列} \\ \boldsymbol{b}(x) = (b_j(x))\text{: 区間 } [\alpha, \beta] \text{ 上で定義された連続な } n \text{ 次実ベクトル値関数} \\ \boldsymbol{y}(x) = (y_j(x))\text{: 未知 } n \text{ 次実ベクトル値関数} \end{array} \right)$$

(1) $Y(x) = e^{xA}$ と置くとき, 定数変化法により $(*)$ の一般解が次の様に表示される事を示せ:

$$\boldsymbol{y}(x) = Y(x)\boldsymbol{c} + Y(x) \int Y^{-1}(x)\boldsymbol{b}(x)\,dx \qquad (\boldsymbol{c} \text{ は任意の } n \text{ 次定ベクトル}).$$

(2) $\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の一般解 $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ を求めよ.

但し, $\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ -\sin\beta x & \cos\beta x \end{pmatrix}$ を用いて良い.

[13] 次の 連立線形微分方程式 を考える.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x) & — \quad (*) \\ \boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) & — \quad (**) \end{cases}$$

但し, $\boldsymbol{y}(x)$ は 未知 n 次ベクトル値関数, $A(x)$, $\boldsymbol{f}(x)$ は 区間 I 上の 与えられた 連続な $n \times n$ 行列値関数 及び n 次ベクトル値関数 である.

(1) 次の 用語・命題 の内容 を簡潔に説明せよ (証明不要).

(i) $(**)$ に関する "重ね合わせの原理"

(ii) $(*)$ に関する "初期条件に対する大域解の存在と一意性"

(iii) 基本解系・基本解行列 及び その ロンスキアン $W(x)$

(2) $Y(x)$ が 基本解行列のとき, $(*)$ の 一般解 が次の式で与えられることを, 定数変化法 を用いて示せ.

$$\boldsymbol{y}(x) = Y(x)\boldsymbol{c} + Y(x) \int Y(x)^{-1} \boldsymbol{f}(x)\,dx \qquad (\boldsymbol{c}: \text{任意 } n \text{ 次定ベクトル})$$

(3) $A(x) \equiv A$ (定行列) の場合を考える.

(i) 指数行列 e^{xA} の定義を記せ.

(ii) $(**)$ の一般解を e^{xA} を用いて表せ.

11.5 べき級数解法

[1] 微分方程式 $y'' + 2xy' + 2y = 0$ の巾級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を次の手順で求めよ.

(1) y', y'' を巾級数の形で表せ.

(2) y, y', y'' を方程式に代入して, 係数 c_n に関する漸化式を求めよ.

(3) c_n の一般項を求めよ.

(4) 方程式の一般解を求めよ.

[2] 微分方程式 $(1-x^2)y'' - 2xy' - \frac{1}{4}y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ の解を級数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で求めよ.

11.6 変分法

[1] 関数 $y\colon [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ に対して, 汎関数 $F(y)$ を 次式 で定義する:

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} f(x, y(x), y'(x))\,dx, \qquad f(x, y, u) = u^2 - y^2.$$

境界条件 $y(0) = y(\pi/2) = 1$ のもとで $F(y)$ の臨界点を求めよ.

[2] 関数 $y\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ に対して, 次の形の汎関数 $F(y)$ を 考える:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \qquad \bigl(f(x,y,u) \text{ は領域 } [a,b] \times \mathbf{R}^2 \text{ 上の } C^2 \text{ 級関数}\bigr).$$

境界条件 $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ のもとで, $F(y)$ の臨界点 y を求めたい.

(1) 関数 y の (端点を固定した) 摂動の定義を記せ.

(2) $y_\varepsilon \quad (-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ を y の (端点を固定した) 摂動とし, $h(x) = \left.\dfrac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} y_\varepsilon(x)$ とおく.
次の "第一変分公式" を示せ:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(y_\varepsilon) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x, y(x), y'(x)) \right) \right) h(x)\, dx$$

(3) 関数 y が (境界条件 $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ のもとで) 汎関数 $F(y)$ の臨界点になるための必要十分条件は, 次の Euler-Lagrange 方程式をみたす事である. これを示せ.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x, y(x), y'(x)) \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x))$$

[3] 関数 $y\colon [0, \pi/4] \to \mathbf{R}$ に対して汎関数 $F(y)$ を次式で定義する:

$$F(y) = \int_0^{\pi/4} f(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad f(x,y,u) = u^2 - 4y^2.$$

境界条件 $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 0$ のもとで $F(y)$ の臨界点を求めよ.

[4] (1) 汎関数 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ が 次により定義されているとする:

(a) $\mathcal{C}$ は「平面上の C^2-級曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で 端点条件 $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{q}$ を満たすもの全体の成す空間」を表す. 但し, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は 平面上 の 2 つの 固定点 である.

(b) 汎関数 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ は, ある C^2 級関数 (ラグランジュ関数)

$$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

を用いて, 次式で定義されている:

$$F[\boldsymbol{x}] = \int_a^b f(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t))\, dt \qquad (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{C})$$

(i) $\mathcal{C}$ における 曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ に関して, 次の用語の定義を記し, その定義を表すような (抽象的な) 図を描け.

(a) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ の $\mathcal{C}$ における 摂動 $\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{x}_\varepsilon(t) \;\; (-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$

(b) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ が F の 停留点 である.

(ii) $\mathcal{C}$ における 曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ に対する (ラグランジュ関数 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に関する) Euler−Lagrange 方程式 を記せ (証明不要).

(2) 関数 $y = y(x) : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ に対して 次の 汎関数 F 及び 境界条件 (#) を考える:

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} f(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad \text{但し} \quad f(x, y, u) = y^2 + yu - u^2$$

$$y(0) = 1, \ \ y(\pi/2) = 2 \qquad \text{— (\#)}$$

境界条件 (#) の下で, 汎関数 $F(y)$ の 臨界関数 $y = y(x)$ を求めよ.

12. 数理解析

12.1 複素数, 複素函数

[1] 次の複素数の実部と虚部を求めよ. (a, b, c, d は実数.)

(1) $\dfrac{a-b\,i}{c-d\,i}$ (2) $\dfrac{5-i}{1-i}$ (3) $(a+b\,i)^2$ (4) $(c-d\,i)^3$ (5) $(2+3\,i)^3$

[2] 次の複素数の極形式を求めよ.

(1) -1 (2) $-1-i$ (3) $-3\,i$ (4) $2-2\sqrt{3}\,i$ (5) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$

[3] 0 でない複素数 α は極形式 $\alpha = re^{i\theta}$ で表される. ($r>0$ である.) $r=e^{\log r}$ であるから, $\alpha = e^{\log r}e^{i\theta}$, 或いは, $\alpha = e^{\log r + i\theta}$ と書くことができる. 複素数 α の複素数 β 乗 α^{β} を $e^{(\log r + i\theta)\beta}$ で定義する. つまり, $(\log r + i\theta)\beta = a + b\,i$ を計算して, $\alpha^{\beta} = e^{a+b\,i} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ とする. では, i^i は何になるか.
注意: 極形式は一意的でないから, α^{β} も一意に定まるとは限らない.

[4] (1) $1+i = re^{\theta i}$ を満たす実数 r, θ $(r>0)$ を求めよ.

(2) $\log(1+i)$ を求めよ.

(3) $(1+i)^i$ を求めよ.

[5] 次の複素数の実部, 虚部, 絶対値, 偏角, 共役複素数を求めよ.

(1) $(1+i)+\dfrac{1+3\,i}{2+i}$ (2) $\dfrac{4-3\,i}{1+3\,i}+(1+i)$ (3) $(\sqrt{6}+\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,i)^3$

(4) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{21}$ (5) $\left(\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}\,i}{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}\right)^{10}$ (6) $(-1)^{\pi}$ (7) i^{π} (8) $(-i)^{1+i}$

[6] $A=\sqrt{3}+i$, $z=2-2\,i$ として, 次の複素数を複素平面上に図示せよ.

(1) $A+z$ (2) Az (3) $\dfrac{1}{z}$ (4) $\dfrac{A}{z}$ (5) $\bar{A}+\bar{z}$ (6) $\bar{A}\bar{z}$ (7) $\dfrac{\bar{A}}{\bar{z}}$

[7] 次の条件を満たす点の集合を複素平面上に図示せよ.

(1) $\left\{\, z : \sqrt{2}\,|z-i| \geq |z-1| \,\right\}$ (2) $\left\{\, z : \mathrm{Re}\, iz^2 \leq 1,\ \mathrm{Im}\, iz^2 \geq 1 \,\right\}$

(3) $\left\{\, z : |z-3\,i| + |z+3\,i| = 10 \,\right\}$ (4) $\left\{\, z : \mathrm{Im}\, i(z^2+2z) \leq 4 \,\right\}$

[8] 次の問に答えよ.

(1) $z^3 = i$ を満たす複素数 z を全て求め, 極形式で書き表せ.

(2) 複素数 z に対して $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ とする．$\tan z$ を e^{iz} を用いて表せ．

(3) $\tan z = 2i$ を満たす z をすべて $z = a + b\,i$ $(a,\, b:$ 実数$)$ の形で求めよ．

[9] 次の方程式の解を求めよ．

(1) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (2) $z^5 = -1 - i$

(3) $\sin z = 2$ (4) $\cos z = \sqrt{3}$ (5) $(\tan z)^2 = -3\,i$ (6) $\tan z = \dfrac{\tan z - 1}{\tan z + 1}$

[10] 複素数 z, w に対し, 次の中線定理を証明せよ．

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,(|z|^2 + |w|^2)$$

[11] 複素数 $\alpha = a + ib$ $(a,\, b$ は実数$)$ に対し, 一次函数 $w = \alpha z$ は

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．

12.2 複素函数の微分

[1] (1) 複素函数 $f(z) = \overline{z^2}$ と 0 でない複素数 h に対し, 次を計算せよ． $\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$

(2) $f(z)$ は $z = 0$ で微分可能であることを示し, $f'(0)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ は $z \neq 0$ でも微分可能かどうか調べよ．

[2] $\mathbf{C}$ 上で定義された関数 $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = |z|^2$ は $\mathbf{C}$ 上正則か, 理由をつけて答えよ．

[3] A を実数の定数とする．$u(x, y) = x^2 + Ay^2$ が調和関数であるとき, A を求めよ．また $u(x, y)$ を実部に持つような $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ．

[4] 実数値関数 $u(x, y)$ は正則関数 $f(z)$ の実部 $(\operatorname{Re} f(z))$ である． 即ち, ある実数値関数 $v(x, y)$ があって, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ は正則関数となる．このとき, $u(x, y)$ も $v(x, y)$ も調和函数となることを示せ．($v(x, y)$ を $u(x, y)$ の共役調和函数という.)

[5] 次の実数値関数は (その定義域において) ある正則関数の実部である．その正則関数を求めよ．

(1) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ (2) $u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$

(3) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ (4) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$

[6] 関数 $u = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$ が調和函数となることを確かめ, u の共役調和函数 v を求めよ．

[7] 正則関数 $f(z)$ は $f(i) = 0$ で $\operatorname{Re} f(x + iy) = y(3x^2 + 1 - y^2)$ であるという．$f(1)$ を求めよ．

[8] $\mathbf{C}$ の領域 D 上の定数でない正則関数 $f(z)$ の複素共役 $g(z) = \overline{f(z)}$ がその領域 D で正則になることがあるか．理由を付けて答えよ．

12.3 特異点, 留数

[1] 次の留数を計算せよ.

(1) $\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ の $z=0,\,1$ での留数　　(2) $\dfrac{1}{e^z-1}$ の $z=0$ での留数

[2] 次の複素関数の複素平面での特異点の全体を求めよ. その特異点は真正特異点であるか極であるか, 極であればその位数は何か. また, 留数の値は何か.

(1) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$　　(2) $g(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$　　(3) $h(z)=\dfrac{1}{\cos z}$

(4) $k(z)=\dfrac{z\sin z}{(z^2+1)^2}$　　(5) $s(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$　　(6) $t(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$

[3] 複素関数 $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ は全複素平面から $n\pi$ (n は整数) を除いたところで正則で, $n\pi$ では 1 位の極を持つことを示し, $n\pi$ での留数を求めよ.

[4] 複素変数の双曲線正弦関数 $\sinh z=\dfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})$ と双曲線余接関数 $\coth z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $\sinh z=0$ の解を全て求めよ.

(2) $\coth z$ は $\mathbf{C}$ のどこに特異点をもつか, その特異点は真正特異点であるか極であるか, 極であればその位数は何か, そこでの留数は何か, 答えよ.

12.4 級数展開, 複素函数の積分

[1] 原点 $z=0$ を除いて $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ と定義された複素関数は $f(0)=1$ とすると全複素平面で正則になる. その $z=0$ でのベキ級数展開を求めよ.

[2] 原点中心で半径 $\epsilon>0$ の半円周 $C\colon z(\theta)=\epsilon e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ に対し $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z}$ を求めよ.

[3] 次の積分の値を留数の計算により求めよ. 但し C は単位円を正の方向に一周する積分路である.

(1) $\displaystyle\int_C\frac{e^z-1}{z^2}\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^3}\,dz$　　(3) $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{z^2}\,dz$　　(4) $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{z^4}\,dz$

[4] 円周上を反時計回りにまわるとき, 次の積分の値をそれぞれ求めよ.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}$　　(2) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^2+1}$　　(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2e^z}{(z+i)^3}\,dz$　　(4) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{ze^{-z}}{(z-i)^4}\,dz$

[5] 次の積分を求めよ.

(1) 積分路 C は i を中心とする半径 2 の円 (正方向に一周) とする.

(i) $\displaystyle\int_C\frac{z}{z-i}\,dz$　　(ii) $\displaystyle\int_C\frac{2z+3}{(z-1)(z-2)}\,dz$

(2) 積分路 C は 円 : $|z+1|=2$ (正方向に一周) とする.

(i) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2(z-3)}\,dz$ (ii) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz$

[6] (1) $z^3-i=0$ を満たす複素数 z を全て求め, 極形式で書き表せ.

(2) 次の積分路 C に対して複素線積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^3-i}\,dz$ の値を求めよ.

(i) $C=\{\,z\in\mathbf{C}\mid |z-i|=\sqrt{2}\,\}$ (ii) $C=\{\,z\in\mathbf{C}\mid |z+i|=\sqrt{2}\,\}$

[7] 複素関数 $f(z)=\dfrac{2}{z^3-3z^2+2z}$ について次の各問に答えよ.

(1) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(2) $f(z)$ を $\{\,z\,;\,0\le|z|\le1\,\}$, $\{\,z\,;\,1\le|z|\le2\,\}$, $\{\,z\,;\,2\le|z|\,\}$ でローラン展開せよ.

(3) 複素平面上の 中心 i, 半径 2 の円周 C に沿った反時計回りの複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ.

[8] 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z+2i)}$ について次の各問に答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

(1) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(2) $f(z)$ を $z=0$ のまわりでローラン展開せよ.

(3) 複素平面上の 中心 i, 半径 2 の円周 C に沿った反時計回りの複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ.

[9] C を単位円周上を正の向きに回る積分路とする. n を自然数とする.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz$ を計算することにより次を示せ. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=\frac{2\pi}{n!}$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^n}}{z}\,dz$ を計算することにより次の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}\cos(\sin n\theta)\,d\theta$

[10] (1) 複素平面 $\mathbf{C}$ 全体で正則な関数 f の 点 $z_0\in\mathbf{C}$ での微分係数 $f'(z_0)$ を z_0 を中心とする半径 R の円 C_R 上でのある関数の線積分として表す式を示せ. それを用いて, f が全複素平面で有界であれば, 即ち, 任意の $z\in\mathbf{C}$ について $|f(z)|<M$ となる数 M があれば, f は定数関数であることを示せ.

(2) 複素平面 $\mathbf{C}$ 全体から有限個の点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を除いたところで定義された正則な複素関数 f が, 次の条件を満たしているとする.

($*$) ある正数 A と R があって, $|z|\ge R$ のとき $|f(z)|\le\dfrac{A}{|z|^2}$ が成り立つ.

このとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)=0$$

[11] $\mathbf{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ の実部 $\mathrm{Re}\,f(z)$ がある実数 a について $\mathrm{Re}\,f(z)\le a$ を満たしているとする.

(1) $e^{f(z)}$ の絶対値 $|e^{f(z)}|$ が有界であることを示せ.

(2) f は定数関数であることを示せ.

12.5 複素積分の定積分への応用, ルーシエの定理

[1] 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2-\sin\theta}\,d\theta$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+(\sin\theta)^2}\,d\theta$ (3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$ (5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ (6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13+12\cos\theta}$

(7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)(5+3\cos\theta)}$ (8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)(13+5\cos\theta)}$

(9) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\,d\theta \quad (a>1)$ (10) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2b\cos\theta+b^2}\,d\theta$

(11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ (12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ (13) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

(14) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4+1}\,dx$ (15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$ (16) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx$

(17) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ (18) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$ (19) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$

(20) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+2x^2+9}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+3)^2-4x^2}\,dx$ (21) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

(22) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$ (23) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-x+1}\,dx$ (24) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx$

(25) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}\,dx$ (26) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$ (27) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx.$

[2] 次の方程式の領域 D 内での解の個数を求めよ.

(1) $e^z - 9z^6 + z + 2 = 0$ $\quad D = \{\, z : |z| < 1 \,\}$

(2) $z^5 - 5z^2 + z + 1 = 0$ $\quad$ (i) $D = \{\, z : |z| < 1 \,\}$ $\quad$ (ii) $D = \{\, z : 1 < |z| < 2 \,\}$

[3] 複素平面の原点を中心とし半径が R の円を C_R で表す.

(1) 関数 $f(z)$ は, 正の実数 R_0 について領域 $\{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| > R_0 \,\}$ で正則であるとする. $R > R_0$ に対して

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_{1/R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\,dw$$

となることを複素線積分の定義に戻って示せ. これは $z = \dfrac{1}{w}$ の変数変換による書き換えであるが, $C_{1/R}$ を回る向きについて注意せよ.

(2) 複素 n 次多項式 $\quad F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ $\quad$ 及び
複素 $(n-1)$ 次多項式 $\quad G(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1} \quad (b_0 \neq 0)$ $\quad$ を考える.
十分大きな正の実数 R に対して $\displaystyle\int_{C_R} \frac{G(z)}{F(z)}\,dz$ の値を (1) を用いて求めよ.

13. 応用数理

13.1 フーリエ級数

[1] この問題では, 複素内積が定義された複素ベクトル空間において, 任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ と N 個の互いに直交するベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ に対し, $\boldsymbol{w} - (c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_N\boldsymbol{v}_N)$ の長さが最小になるのは $c_n = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n)}$ $(n = 1, \cdots, N)$ のときであることを証明なしに用いる.

関数空間 $\mathrm{pC}([-1,1])$ 上に, 内積 $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$ を定義した時, 4 個の関数の集合

$$\left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}x\right\}$$

は直交系である. ただし, 関数と言ったりベクトルと言ったりするが, 空間が $\mathrm{pC}([-1,1])$ なので, 同じものを意味していることに注意せよ.

これに基づき $[-1,1]$ 上の関数 x^4 と 3 次関数の差の長さを最小にするような 3 次関数を求めよ.

[2] 以下の (有限) フーリエ級数が 正弦余弦形 であるときは 複素形 に, 複素形 であるときには 正弦余弦形 にそれぞれ変形せよ:

(1) $\cos x - i\sin x$　　(2) $1 + \cos 2x + (2\cos 3x + 2i\sin 3x)$　　(3) $2e^{ix} - ie^{i3x}$

(4) $1 + \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + \left(2e^{i2x} + 2e^{-i2x}\right)$

[3] (1) 関数 $f(x) = e^{ix}\sin x$ を複素形 および 正弦余弦形 のフーリエ級数に展開せよ.

(2) 関数 $f(x) = \sin 2x\cos x$ を 正弦余弦形 の (有限) フーリエ級数に展開せよ.

(3) 関数 $f(x) = \sin 3x\cos x$ の 複素形 及び 正弦・余弦形 のフーリエ級数展開 を求めよ.

[4] (1) 周期 2π を持ち, $-\pi \leq x < \pi$ において次の式で定義される関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x(\pi - x) & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(2) 関数 $f(x)$ を 関数 e^x $(-\pi < x < \pi)$ の 周期 2π での拡張とする. $f(x)$ の 複素形フーリエ級数展開 を求めよ.

[5] 周期関数 $f(x)$ は, 基本周期が 2π で,

$$f(x) = \frac{-\pi - x}{2} \quad (x \in [-\pi, 0)), \qquad f(0) = 0, \qquad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0, \pi])$$

で定義されている. 関数 f のフーリエ係数は $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定義されている.

もちろん周期性があるので, 積分区間は任意の周期区間でよい. 各整数 n に対して $c_n(f)$ を計算し, 部分和 $s_N[f](x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ をオイラーの公式を用いて整理せよ.

[6] (1) 実数 a に対して $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)e^{-inx}dx$ をフーリエ係数 $c_n(f)$ を含むが積分記号は含まない式で表せ.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{5ix}f(x)e^{-inx}dx$ をフーリエ係数 $c_n(f)$ を含むが積分記号は含まない式で表せ.

[7] フーリエ級数 $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\omega x}$ に関する 次の定理の内容を簡潔に説明せよ (証明不要).

(1) フーリエ級数の収束定理　　(2) パーセバルの等式

[8] (1) 関数 $f(x) = x(\pi - x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ (の奇関数としての 2π 周期的拡張) をフーリエ正弦級数展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ を示せ.

(3) (2) の結果とパーセバルの等式を用いて等式 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ を示せ.

[9] (1) 定数 α が $0 < \alpha < \pi$ を満たすとき, 関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < \alpha) \\ 1/2 & (x = \alpha) \\ 0 & (\alpha < x \leqq \pi) \end{cases}$ をフーリエ余弦級数に展開せよ.

(2) 上の結果を用いて級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$ の和を求めよ.

(3) また, パーセバルの等式を用いて等式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ を示せ.

[10] 関数 $f(x)$ は周期 2π を持ち, 区間 $(-\pi, \pi]$ で次のように与えられている. $f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$

(1) $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

(2) (1) を利用して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めよ.

[11] 1次元熱方程式に対する混合問題

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty) \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0 \quad (0 \leqq t < \infty) \qquad u(0,x) = f(x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \end{aligned} \qquad \cdots (*)$$

について次の問に答えよ:

(1) $f(x) = 2$ のとき, 混合問題 $(*)$ を解け.

(2) $f(x) = (\cos x)^3$ のとき, 混合問題 $(*)$ を解け.

[12] 次の 1 次元熱方程式に対する混合問題について後の問 (1)〜(3) に答えよ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < t < \infty,\ 0 < x < \pi) \tag{15.1}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,\pi)}{\partial x} = 0 \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{15.2}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq \pi) \tag{15.3}$$

(1) $u(t,x) = T(t)X(x)$ の形をした (15.1), (15.2) のゼロでない解をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x) = (\sin x)^2 \cos 2x$ を 正弦余弦形 の (有限) フーリエ級数に展開せよ.

(3) $f(x) = (\sin x)^2 \cos 2x \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ のとき, 混合問題 (15.1), (15.2), (15.3) を解け.

[13] 次の 1 次元熱方程式に対する混合問題について後の問に答えよ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < t < \infty,\ 0 < x < \pi) \tag{15.4}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{15.5}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq \pi) \tag{15.6}$$

(1) $u(t,x) = T(t)X(x)$ の形をした (15.4), (15.5) のゼロでない解をすべて求めよ,

(2) $f(x) = \sin 2x \cos x$ のとき, 混合問題 (15.4), (15.5), (15.6) を解け.

[14] フーリエ正弦級数 $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx$ を利用して, 次の区間 $[0,\pi]$ 上の熱伝導方程式を解け.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 < x < \pi,\ t > 0)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad (t > 0)$$

$$u(x,0) = \sin x \cos 2x \qquad (0 < x < \pi)$$

[15] 次の「熱方程式 に対する 初期値・境界値 問題」を考える.

$$\begin{array}{lll} \text{(HE)} & u_t = u_{xx} & (0 < t < \infty,\ 0 < x < \pi) \\ \text{(BC)} & u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (0 \leq t < \infty) \\ \text{(IC)} & u(0,x) = f(x) & (0 \leq x \leq \pi) \end{array}$$

まず (HE), (BC) の 変数分離形 ($u(t,x) = T(t)X(x)$ の形) の 非自明な解 を求めると, 次の基本関数系が得られる:

$$u_n(t,x) = e^{-n^2 t} \sin nx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(HE), (BC) が 線形性 を持つことに注意して, (HE), (BC), (IC) の解を $u(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, u_n(t,x)$ の形で求めたい.

(i) 関数 $u(t,x)$ が (IC) を満たすためには, 係数 b_n を 関数 $f(x)$ に対してどのような形で定めたらよいか説明せよ.

(ii) $f(x) = \sin 3x \cos x$ の場合に, 解 $u(t,x)$ を求めよ.

[16] 熱方程式 $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$ の解のうち, $x = 0, \pi$ の両方で Dirichlet 境界条件を満たし, 初期条件が $u(0,x) = \sin x - \sin(3x)$ であるものを求めよ.

13.2　フーリエ変換

関数 $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の フーリエ変換 を $F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ で表す.

[1] 次の用語・定理の内容を簡潔に説明せよ (証明不要).

(1) フーリエ反転公式

(2) フーリエ変換に関する パーセバル・プランシュレルの等式

(3) 超関数 $\Phi:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ 及び そのフーリエ変換 $\mathcal{F}\{\Phi\}$ (授業で用いた定義を記せ)

(4) 関数 $f(t)$, $g(t)$ の合成積 $(f*g)(t)$

[2] 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を求めよ.

(1) $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\geq 1)\end{cases}$　(2) $f(t)=e^{-|t|+iat}$ (a は実数)　(3) $f(t)=e^{-|t|}\cos 2t$

(4) $f(t)=e^{-t^2-2t}$　(5) $f(t)=e^{-2t^2+t}$

ただし, 次の公式を用いてもよい.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t+z)^2}{a}}\,dt=\sqrt{a\pi}$　($a>0,\ z\in\mathbf{C}$)

[3] 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求め, さらに $f(t)$ のフーリエ正弦積分表示を与えよ.

(1) $f(t)=\begin{cases}t-1 & (0<t<1)\\ t+1 & (-1<t<0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$　(2) $f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<1)\\ -1 & (-1<t<0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$

[4] 次の等式をフーリエ変換の定義に基づいて示せ.

(1) $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$　$(a>0)$　(2) $\mathcal{F}\{\delta(t-a)\}(\omega)=e^{-i\omega a}$　$(a\in\mathbb{R})$

[5] 次の「熱方程式に対する初期値問題」を考える.

(HE)　$u_t(t,x)=u_{xx}(t,x)$　$(0<t<\infty,\ x\in\mathbb{R})$

(IC)　$u(0,x)=f(x)$　$(x\in\mathbb{R})$

$u(t,x)$ の x の関数としての フーリエ変換　$\hat{u}(t,\omega)=\mathcal{F}_x(u(t,x))(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{-i\omega x}\,dx$　を考える.

(1) 初期値問題 (HE) (IC) は, ($u(t,x)$ に関する適当な仮定の下で) フーリエ変換 により $\hat{u}(t,\omega)$ に関するどのような方程式に変換するか記せ. さらに, この方程式を解いて $\hat{u}(t,\omega)$ を求めよ.

(2) $f(x)=\delta(x-a)$ の場合を考える.

(i) $\hat{u}(t,\omega)$ を求めよ.

(ii) フーリエ変換の一意性 (or フーリエ逆変換 $\mathcal{F}_x^{-1}$) により $u(t,x)$ を求めよ.

[6] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は 急減少関数 とする. つまり, f は 無限回微分可能 で

$$\forall m,k\in\{0,1,2,\ldots\}\quad \exists C_{m,k}>0\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \left|t^m f^{(k)}(t)\right|\le C_{m,k}$$

が成り立つ. 本問では (a) $t^m f^{(k)}(t)$ もやはり急減少関数であること, (b) すべての急減少関数が有界かつ絶対可積分であること, (c) 微分・積分の順序交換 を証明せずに認める.

(1) (i) $\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)$ 及び $\mathcal{F}\{t\,f(t)\}(\omega)$ を, 主として $F(\omega)$ を含む数式で表せ.

(ii) $g(t)=t\,\dfrac{d}{dt}\,(t\,f(t))$ と置く. $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ を, 主として $F(\omega)$ を含む数式で表せ.

(2) c は正の定数とする. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は急減少関数で, $f''(t)+c\,t\,f'(t)+c\,f(t)=0$ を満たすとする.

(i) この方程式の両辺をフーリエ変換することによって, $F(\omega)$ が満たす方程式を導け.

(ii) (i) の方程式の解 $F(\omega)$ をひとつ求めよ.

13.3 ラプラス変換

関数 $f(t)$ $(t\ge 0)$ の ラプラス変換 を $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ で表す.

[1] 次の用語・命題 の内容を簡潔に説明せよ (命題の証明は不要である).

(1) ラプラス変換 $F(s)$ の 収束座標 σ_0 の定義を記せ.

(2) 複素関数 $F(z)$ の正則性について説明せよ.

(3) ラプラス変換に関する 第 1 反転公式 を記せ.

[2] (1) 関数 $f(t)=(t+1)\cos 2t$ のラプラス変換を求めよ.

(2) 関数 $F(s)=\dfrac{-s^2+11s-27}{(s^2-4s+8)(s+1)}$ のラプラス逆変換を求めよ.

(3) 関数 $f(x)=\sin x,\ g(x)=e^{-x}$ の合成積とそのラプラス変換を求めよ.

[3] (1) ラプラス変換の定義に基づいて次の等式を示せ: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a)\quad (a\in\mathbb{R})$

(2) $\mathcal{L}\{t^n\}(s),\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\}(s)\quad (n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ.

(3) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s)\quad (a\in\mathbb{R},\ n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ.

[4] $s\in\mathbb{C},\,a\in\mathbb{C}$ とする.

(1) $t\in[0,\infty)$ のとき, $|e^{-st}|$ を 絶対値記号 を含まない式で表せ.

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-st}=0$ となるのは, s が ガウス平面 のどの範囲にあるときか？

(3) 関数 $f(t)=e^{-at}$ のラプラス変換 $F(s)$ を, リーマン広義積分 の定義に留意しながら計算し, 収束座標 σ_0 も求めよ.

[5] 次の 2 階線形常微分方程式 の 初期値問題 を考える：

$$y''+ay'+by=f(t),\qquad y(0)=c_0,\qquad y'(0)=c_1\qquad \text{— } (*)$$

$Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$ とおく.

(1) 初期値問題 $(*)$ は, ラプラス変換の下で $Y(s)$ のどのような 方程式に変換されるか.

(2) (1) の方程式の解 $Y(s)$ を求めよ.

[6] 本問では, (a) ラプラス変換の一意性 及び (b) 登場するすべての関数 g が $\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) - g(0)$ を満たすこと を仮定する.

方程式 $f'' + 4f' + 3f = 0$ の両辺をラプラス変換し, $F(s)$ の方程式を解くことを経由して, 基本解を求めよ.

注) 斉次線型常微分方程式の基本解とは, すべての解が成すベクトル空間の基底である. 解が n 次元空間を成す場合には, 基本解は n 個の解が成す集合である.

[7] ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解け.

(1) $y'' + 2y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (但し $f(t)$ は連続関数)

(2) $y'' + 2y' + 10y = -10t + 18, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$

(3) $y'' - 4y = 4e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(4) $y'' + 2y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(5) $y'' - y' - 2y = 9e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

(6) $y'''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 8$

[8] (1) 次の部分分数分解における定数 A, B, C の値を定めよ. $\dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)} = \dfrac{A}{(s-1)^2} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s+2}$

(2) ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解け.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 9e^t, \qquad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = -2$$

[9] 次の積分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(1) $2y(x) - 10\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt = \cos x$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty y(t)\sin xt\,dt = \begin{cases} (\pi/2)\sin x & (|x| < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x) \end{cases}$

[10] 次の与えられた初期条件を持つ微積分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

$$y'(x) - 2y(x) - 3\int_0^x y(t)\,dt = 4e^{3x}, \qquad y(0) = 5$$

14. 数理応用幾何

14.1 微分形式

[1] $\mathbf{R}^3$ 上の 2 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}=(F,G,H)$, $\overrightarrow{B}=(P,Q,R)$ および, これに対応する 1-形式

$$\alpha = F dx + G dy + H dz, \qquad \beta = P dx + Q dy + R dz$$

を考える. 外積 $\alpha \wedge \beta$ の外微分 $d(\alpha \wedge \beta)$ については, $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$ 成り立つ. ベクトル解析において, このことに対応するベクトル場 $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ について成り立つ関係式は何か.

[2] $\mathbf{R}^3$ から原点を除いた領域を Ω とし, Ω 上の 1-形式 $\sigma = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ を考える. Ω 上の滑らかな関数 $f(x,y,z)$ について, もし $f\sigma$ が閉形式になれば, Ω 上のある滑らかな関数 $g(x,y,z)$ が存在して $df = g\sigma$ となることを示せ.

14.2 平面曲線

[1] a, b を正の実数とする.

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の各点における曲率を求めよ.

(2) $a > b$ であるとき, (1) の楕円上で曲率が最大になる点と最小になる点を求めよ.

[2] a, k を正の実数とする. 極方程式 $r = ke^{a\theta}$ で与えられる一般の対数らせんを考える.

(1) x, y 座標をパラメータ θ の式として表し, パラメータが θ の時の単位接ベクトル $\overrightarrow{e}(\theta)$ と単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}(\theta)$ で, $\{\overrightarrow{e}, \overrightarrow{n}\}$ が正の正規直交基底となるものを求めよ.

(2) パラメータが θ の時のこの曲線の曲率 $\kappa(\theta)$ を求めよ.

14.3 空間曲線

[1] a, b を正の実数とする. t をパラメータとする $\mathbf{R}^3$ の曲線 $\overrightarrow{\gamma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ を考える. s を弧長パラメータとする.

(1) 曲線の単位接ベクトル $\overrightarrow{e}$ を t の関数として表し, $\dfrac{ds}{dt}(t)$ を求めよ. $\left(\dfrac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{\gamma}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \overrightarrow{e}\dfrac{ds}{dt} \text{ である.}\right)$

(2) 曲線の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$, 単位陪法線ベクトル $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e} \times \overrightarrow{n}$, 曲率 κ, 捩率 τ を t の関数として表せ.

14.4 空間曲面

[1] (球面) R を正の実数とする．写像 $\overrightarrow{\Xi}\colon (0,\pi)\times(0,2\pi)\to \mathbf{R}^3$ を

$$\overrightarrow{\Xi}(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

で定義する．$\overrightarrow{\Xi}$ の像は原点を中心とする半径 R の球 (から一つの子午線を除いたもの) である．

(1) $\dfrac{\partial\overrightarrow{\Xi}}{\partial\theta}, \dfrac{\partial\overrightarrow{\Xi}}{\partial\varphi}$ は接空間の互いに直交する基底である．それぞれをその長さで割って，正規直交基底 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ を求めよ．

(2) $(0,\pi)\times(0,2\pi)$ 上で定義される 1-形式 σ_1, σ_2 で，

$$d\overrightarrow{\Xi} = \frac{\partial\overrightarrow{\Xi}}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{\Xi}}{\partial\varphi}\,d\varphi = \overrightarrow{e_1}\,\sigma_1 + \overrightarrow{e_2}\,\sigma_2$$

を満たすものを求めよ．

(3) $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}$ を並べた 3×3-行列 $P = \begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{n}\end{pmatrix}$ を微分するとき，

$$dP = \begin{pmatrix} d\overrightarrow{e_1} & d\overrightarrow{e_2} & d\overrightarrow{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma & -\tau_1 \\ \sigma & 0 & -\tau_2 \\ \tau_1 & \tau_2 & 0\end{pmatrix}$$

を成り立たせる 1-形式 σ, τ_1, τ_2 を求めよ．

(4) 球面のガウス曲率 K を求めよ．

[2] 空間曲線 $\overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2 t \\ \sin t\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$ $(t\in[0,2\pi])$ を考える．この曲線は単位半径の球面上にある閉曲線である．

(1) 空間曲線として考えた時の，

単位接ベクトル $\overrightarrow{e}(t)$，　主法線ベクトル $\overrightarrow{n}(t)$，　従法線ベクトル $\overrightarrow{b}(t)$

を求め，更に，曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を求めよ．

(2) 球面上の曲線として考えた時の，

法曲率ベクトル $\overrightarrow{\kappa_n}(t)$，　測地曲率ベクトル $\overrightarrow{\kappa_g}(t)$，　法曲率 $\kappa_n(t)$，　測地曲率 $\kappa_g(t)$

を求めよ．

[3] a を正の実数とする．半径 a の円柱の 2 変数 u, v によるパラメータ表示 $\begin{cases} x = a\cos v \\ y = a\sin v \\ z = u\end{cases}$ を用いて，この円柱の測地線を全て求めよ．

[4] (関数のグラフ) $z = f(x,y)$ を xy 平面の領域 D 上で定義された滑らかな関数とし，S を関数 f のグラフとする (z 軸の正の向きを表とする)．S は自然なパラメータ表示 $\boldsymbol{p}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ $((x,y)\in D)$ を持つ．

(1) 基本ベクトル $\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y$，単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を求めよ．

(2) 第 1 基本量 E, F, G, 第 2 基本量 L, M, N を求めよ.

(3) ガウス曲率 K, 平均曲率 H を求めよ.

(4) 双曲放物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a, b > 0)$ のガウス曲率 K, 平均曲率 H を求めよ.

[5] (回転面) C を「xz 平面の $x > 0$ の部分にある曲線」とし, S を「曲線 C を z 軸の周りに回転して出来る回転面」とする. C の弧長パラメータ表示 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ $(x(s) > 0)$ をとり, S に次のパラメータ表示を与える. $\boldsymbol{p}(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$ $(0 \le v \le 2\pi)$

(1) 基本ベクトル $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$, 単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を求めよ.

(2) 第 1 基本量 E, F, G, 第 2 基本量 L, M, N, ガウス曲率 K, 平均曲率 H を求めよ.

(3) ガウス曲率 $K \equiv 1$ のとき, 関数 $x(u), z(u)$ を求め S を決定せよ.

(4) 平均曲率 $H \equiv 0$ のとき, 関数 $x(u), z(u)$ を求め S を決定せよ.

注) (3), (4) においては, 式の変形の途中で, 適当な合同変換により S を移動して, 関係式をなるべく簡単な形にせよ. (例: 不定積分における任意定数 c を特定の値にとる, etc.)

[6] S を空間の中の滑らかな曲面とする. S の開集合 U に 2 つのパラメータ表示 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ 及び $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}(\xi, \eta)$ $((\xi, \eta) \in E)$ が与えられているとする.

(1) パラメータ表示 $\boldsymbol{p}(u, v)$ に関して次の諸量の定義を記せ.

(a) 基本ベクトル場 $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$　　(b) U 上の正の単位法ベクトル場 $\boldsymbol{\nu}$

(c) 第 1 基本量 E, F, G 及び 第 1 基本行列 $\widehat{I}$

(2) 座標系 $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ から座標系 $\boldsymbol{u} = (u, v)$ への座標変換 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi})$ の定義, 及び, 微分係数行列 $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ の定義を記せ.

(3) パラメータ表示 $\boldsymbol{q}(\xi, \eta)$ に関する 基本ベクトル場, 第 1 基本量, 第 1 基本行列 をそれぞれ $\boldsymbol{q}_\xi$, $\boldsymbol{q}_\eta$, E', F', G', $\widehat{I}'$ で表す.

(i) 基本ベクトル場 $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ と $\boldsymbol{q}_\xi, \boldsymbol{q}_\eta$ の間の関係式 (座標変換の公式) を記し, それを導け.

(ii) 第 1 基本量 E, F, G 及び E', F', G' の間の関係式 (座標変換の公式) を記し, それを導け. それを用いて第 1 基本行列 $\widehat{I}$ 及び $\widehat{I}'$ の間の関係式 (座標変換の公式) を導け.

(4) S の標準面積形式 dA のパラメータ表示 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ に関する成分を第 1 基本量 E, F, G を用いて表し, それを示せ.

[7] S を空間の中の向き付けられた滑らかな曲面とし, $\boldsymbol{\nu}$ を表向きの単位法ベクトル場とする. S の開集合 U 上に 2 つの正のパラメータ表示 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ 及び $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\xi, \eta)$ $((\xi, \eta) \in E)$ が与えられているとする.

(1) パラメータ表示 $\boldsymbol{p}(u, v)$ に関して, 次の諸量の定義を述べよ.

(i) 基本ベクトル $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$, 単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$

(ii) 第 1 基本量 E, F, G, 第 1 基本形式 I, 第 1 基本行列 $\widehat{I}$

(iii) 第 2 基本量 L, M, N, 第 2 基本形式 II, 第 2 基本行列 $\widehat{II}$, 行列 A

(iv) 主曲率 λ_1, λ_2, ガウス曲率 K, 平均曲率 H

(2) パラメータ表示 $\boldsymbol{q}(\xi, \eta)$ に関する (1) の諸量を $'$ を付けて表す ($L', M', N', \widehat{II}', A', \lambda_1', \lambda_2', K', H'$).

(i) 第 2 基本行列 $\widehat{II}$ と $\widehat{II}'$ の間の関係式 (座標変換の公式) を記せ.

(ii) 行列 A と A' の間の関係式 (座標変換の公式) を記せ.

(iii) (ii) を用いて, S の点 $\boldsymbol{p}$ での主曲率 λ_1, λ_2, ガウス曲率 K, 平均曲率 H の定義が正のパラメータ表示の選び方に依らない事を示せ.

(iv) K 及び H の 第 1 基本量 E, F, G 及び 第 2 基本量 L, M, N を用いた表示式を記し, それを示せ.

(3) (曲率の幾何的な意味)

(i) S の点 $\boldsymbol{p}$ における主曲率 λ_1, λ_2 を,「点 $\boldsymbol{p}$ における S の法線を含む平面 π による S の切り口の曲線 C の点 $\boldsymbol{p}$ における (平面曲線としての) 曲率」を用いて 特徴付けよ.

(ii) $\gamma(s)$ を弧長パラメータ表示を持つ S 上の曲線とする. $\gamma(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ として, $\gamma(s)$ の法曲率 κ_n の成分表示 (i.e., $(u(s), v(s))$ を用いた表示) を導き, κ_n が $\gamma(s)$ の接線のみで定まる事を示せ.

(iii) S の点 $\boldsymbol{p}(u, v)$ における接ベクトル $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{p}_u + \beta \boldsymbol{p}_v$ 方向の法曲率が

$$\kappa_n = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

と表される事を示し, 点 $\boldsymbol{p}(u, v)$ における主曲率 λ_1, λ_2 が, 法曲率 κ_n の最大値・最小値と一致する事を示せ.

(iv) S の点 $\boldsymbol{p}$ における主方向の定義を記し, $\boldsymbol{p}$ が臍点でない場合に, 主方向の性質を挙げよ.

[8] (空間曲面上の諸量) S を空間の中の滑らかな曲面とする.

(1) (接ベクトル)

(i) S の点 $\boldsymbol{p}$ における 接ベクトル 及び 接ベクトル空間 T_pS の定義を記せ.

(ii) S 上の滑らかな関数 f の接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_pS$ による方向微分 $\boldsymbol{v}(f)$ の定義を記せ.

(iii) 次の等式を示せ: $\boldsymbol{v}(fg) = \boldsymbol{v}(f) \cdot g(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}(g)$ (f, g は S 上の滑らかな関数).

(2) (リーマン計量)

(i) S 上の一般のリーマン計量の定義を記せ.

(ii) S の標準リーマン計量 (第一基本形式) の (局所座標系に関する成分を用いない) 定義を記せ.

(3) (微分形式)

(i) $r = 0, 1, 2$ に対して次の用語の定義を記せ:

(a) S の点 $\boldsymbol{p}$ における r 形式 (b) S 上の 微分 r-形式

(ii) f を S 上の滑らかな関数とする.

(a) f の外微分 df の定義を記せ. (b) S が連結で $df \equiv 0$ のとき $f \equiv c$ (定数) となる事を示せ.

(iii) S 上の微分 1-形式 α, β に対して, 外積 $\alpha \wedge \beta$ の定義を記せ.

(iv) S の標準面積形式 dA の (局所座標系に関する成分を用いない) 定義を記せ.

[9] S を空間の閉曲面とする.

(1) S 上の測地三角形 $\Delta\,\mathrm{ABC}$ に関する ガウス・ボンネの定理 を記せ. さらに, S 上で常に $K \equiv 0$, $K > 0$, $K < 0$ の各場合において, 測地三角形 $\Delta\,\mathrm{ABC}$ の内角の和に関して論ぜよ.

(2) S のオイラー数 $\chi(S)$ の定義を記し, S 上の 大域的なガウス・ボンネの定理 を述べよ.

[10] S を 向き付けられた空間曲面, U : $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ を S の開集合 U の 正のパラメータ表示とする. 以下の問に答えよ.

(1) パラメータ表示 $U : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ 及び 基本ベクトル $\boldsymbol{p}_u(u, v), \boldsymbol{p}_v(u, v)$, 単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}(u, v) = \dfrac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}$ の 概念図 を描け.

(2) 次の量の定義を記せ: (i) 第 1 基本量 E, F, G, (ii) 第 2 基本量 L, M, N

(iii) 主曲率 λ_1, λ_2, 平均曲率 H, ガウス曲率 K

(3) K, H を E, F, G 及び L, M, N で表せ (証明も記せ).

(4) p を S の点とする. 点 p における S の 接線 ℓ が与えられると, 「ℓ 及び 単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}(p)$ を含む 平面 π_ℓ」 による S の 切り口 の曲線 C_ℓ が定まる. この曲線 C_ℓ の 点 p での ($\boldsymbol{\nu}(p)$ に関する) 符号付きの曲率 を $\kappa(p, \ell)$ で表す.

(i) 曲率 $\kappa(p, \ell)$ の定義を述べよ.

(ii) S の点 p での 主曲率 $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ と 曲率 $\kappa(p, \ell)$ の関係を説明せよ.

(iii) (ii) に基づいて, 曲面 S とその点 p で

(a) $K(p) > 0$, (b) $K(p) = 0$, (c) $K(p) < 0$

となる様な例をそれぞれ挙げよ.

(5) S_a を 原点中心, 半径 $a > 0$ の 球面 とする.

(i) 空間曲面における 測地線の方程式 を用いて, S_a の測地線は 大円の弧 となることを示せ.

(Hint : 測地線 $\gamma(t)$ に対して $\gamma(t) \times \gamma'(t) \equiv \boldsymbol{v}$ (定ベクトル) を示せ.)

(ii) 問 (4) (ii) に基づいて, S_a の ガウス曲率 K 及び 平均曲率 H を求めよ.

(iii) ガウス・ボンネの定理 を用いて, S_a の オイラー標数 を求めよ.

(6) S を 関数 $f(x, y) = xy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ のグラフとする. S の標準的なパラメータ表示 $S : \boldsymbol{p}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ を考える.

(i) ベクトル $\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_{xx}, \boldsymbol{p}_{xy}, \boldsymbol{p}_{yy}, \boldsymbol{\nu}$ を求めよ.

(ii) 基本量 E, F, G 及び L, M, N を求めよ.

(iii) ガウス曲率 K 及び 平均曲率 H を求めよ.

14.5　2 次元多様体

[1] 一般の曲面 S に関して次の問に答えよ.

(1) 次の 用語 の定義を記せ:

(i) S の点 p における　(a) 接ベクトル空間 T_pS　(b) 2-形式　(c) T_pS の 内積

(ii) S 上の　(a) 微分 2-形式　(b) リーマン計量

(2) $(U,(u,v))$ を S の局所座標系とする. U の 点 p における 基本接ベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\right)_p \in T_pS$ の定義を記せ.

(3) S 上の スカラー関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に関して次の問に答えよ.

(i) 点 $p \in S$ における 微分 d_pf の定義を記せ.

(ii) 外微分 df の定義を記せ.

(iii) df の 局所座標系 $(U,(u,v)) \subset S$ に関する 成分表示 を記せ.

(iv) 次の等式を示せ:　$d^2f = 0$

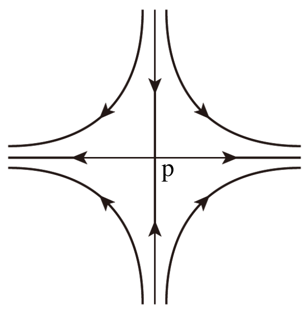
[2] 一般の曲面 S に関して次の問に答えよ.

(1) クラインの壷 の 概形 を描け.

(2) (i) 曲面 S の オイラー標数 $\chi(S)$ の定義を記せ.

(ii) 球面 の オイラー標数 を (i) の定義に基づいて求めよ.

(3) 曲面上の 定常流 とその 速度ベクトル場 を考える. 右図の定常流の速度ベクトル場 X の 特異点 p での 指数 Ind_pX を求めよ.



(4) トーラス 上で

(i) 固定点 を 持たない 定常流 を描け.

(ii) 固定点 の 個数 が 4 個 の 定常流 を描け. さらに, ポアンカレ・ホップの定理 を この 定常流 の 速度ベクトル場 に適応して, トーラス の オイラー標数 を求めよ.

14.6　n 次元多様体

[1] (1) 次の用語の定義を記せ:　M が $\mathbf{R}^N$ の n 次元部分多様体 である.

(2) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域とし, $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を滑らかな関数とする.

(i) f のグラフ $M = \{\,(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega\,\}$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体になる事を示せ.

(ii) $N = \{\,\boldsymbol{x} \in \Omega \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\,\}$ と置く. N の各点 $\boldsymbol{x}$ に於いて $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq \mathbf{0}$ ならば, N が $\mathbf{R}^n$ の $n-1$ 次元部分多様体になる事を示せ (陰関数定理を用いよ).

[2] M を $\mathbf{R}^N$ の n 次元部分多様体とする. 次の用語の定義を記せ.

(1) M の 局所座標系

(2) M の点 $\boldsymbol{p}$ における 接ベクトル, 接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{p}}M$

(3) M 上の接ベクトル場 X

(4) 滑らかな関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ の点 $\boldsymbol{p}$ における微分 $d_{\boldsymbol{p}}f$

(5) M のリーマン計量 g

[3] M を $\mathbf{R}^N$ の n 次元部分多様体, $(U, \boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ を M の局所座標系とする.

(1) $\boldsymbol{p}$ を U の点とする. 次の用語の定義を記せ:

(i) 点 $\boldsymbol{p}$ における座標系 $(U, \boldsymbol{x})$ に関する基本ベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ $(i = 1, \ldots, n)$

(ii) 接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p M$ の $(U, \boldsymbol{x})$ に関する成分 ξ^i $(i = 1, \ldots, n)$

(2) M, $(U, \boldsymbol{x})$, $T_p M$ 及び $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ $(i = 1, \ldots, n)$ を表す概念的な図を描け.

(3) 接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p M$ の局所座標系 $(U, \boldsymbol{x})$ に関する成分 ξ^i $(i = 1, \ldots, n)$ と別の局所座標系 $(V, \boldsymbol{y})$ に関する成分 η^j $(j = 1, \ldots, n)$ の間の変換規則を記し, それを導け.

14.7 位相空間・距離空間

[1] (1) 位相空間の定義を述べよ.

(2) 連続写像の定義を述べ, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ が連続写像のとき, 合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ も連続である事を示せ.

[2] (1) $C([0, 2\pi], \mathbf{R})$ を閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の実数値連続関数全体の集合とし, 関数 $f, g \in C([0, 2\pi], \mathbf{R})$ の距離を次で定義する. $d(f, g) = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - g(x)|$

(i) d が 距離関数 になることを示せ.

(ii) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ に対して $d(f, g)$ を求めよ.

(iii) $f(x) = \sin x$ に対して, 距離空間 $(C([0, 2\pi], \mathbf{R}), d)$ における f を中心とする半径 $r > 0$ の開球 $U_r(f)$ の定義を記し, さらに xy 平面において $y = f(x)$ のグラフと関数 $g(x) \in U_r(f)$ のグラフの関係を調べ, $U_r(f)$ がどのような関数の集合か説明せよ.

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ に無限遠点 $\{\infty\}$ を付け加えた集合を X で表す (すなわち $X = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$). X の位相を定めるため, “点の収束” を次の条件で定義する: $\mathbf{R}^2$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$x_n \longrightarrow x \in \mathbf{R}^2 \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (\text{平面 } \mathbf{R}^2 \text{ 上での通常の収束}),$$
$$x_n \longrightarrow \infty \iff \|x_n\| \longrightarrow \infty \quad (x_n \text{ が原点から無限に遠ざかる}).$$

このとき, 位相空間 X が 2 次元単位球面 $S^2 = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \,\}$ と同相になる (すなわち 1-1 写像 $f\colon X \to S^2$ で, f, f^{-1} 共に連続であるものが存在する) ことを示せ.

14.8　力学系

[1] D を $(t,\boldsymbol{x})$-空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ の領域とし, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\colon D\to\mathbf{R}^n$ は連続写像で, $\boldsymbol{x}$ に関して局所リプシッツ連続であるとする. 曲線 $\boldsymbol{x}(t)\colon (a,b)\to\mathbf{R}^n$ に関する微分方程式: $(*)\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$ を考える.

(1) $(*)$ の解の "局所的存在と一意性" 定理 を簡潔に記せ.

(2) $(*)$ の 極大延長解の定義 を記せ.

[2] D を $(t,\boldsymbol{x})$-空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ の領域, $y=f(t,\boldsymbol{x})\colon D\to\mathbf{R}$ を連続関数とする. 関数 $x(t)\colon (a,b)\to\mathbf{R}$ についての高階微分方程式: $\dfrac{d^nx}{dt^n}=f\left(t,x,\dfrac{dx}{dt},\ldots,\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$ を 1 階化せよ. (同等な連立 1 階微分方程式を求めよ).

[3] Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ を局所リプシッツ連続写像として, 微分方程式: $(*)\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ が各 $\boldsymbol{\xi}\in\Omega$ に対して大域解 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\xi})\ \ (t\in\mathbf{R})$, $\boldsymbol{x}(0;\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$ を持つとする. $(*)$ が定める流れ $\phi_t\colon\Omega\to\Omega$ $(t\in\mathbf{R})$ は $\phi_t(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\xi})$ で定義される. このとき ϕ_t が 次の条件を満たす事を示せ.

$$\text{(i)}\quad \phi_{t+s}=\phi_t\circ\phi_s \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \phi_0=\mathrm{id}_\Omega$$

[4] $A(t)\ (t\in\mathbf{R})$ を n 次正方行列に値を持つ連続関数とし, 曲線 $\boldsymbol{x}(t)\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ に関する線形微分方程式 $(*)\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ を考える. $(*)$ の解全体の集合を S で表す.

(1) S が (写像の和・スカラー倍に関して) ベクトル空間 になる事を示せ ("重ね合わせの原理" を説明せよ).

(2) 写像 $\Phi\colon S\to\mathbf{R}^n$, $\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(0)$ が 線形同型 になることを示せ.

[5] (1) n 次正方行列 A に対する指数行列 e^A の定義を記せ.

(2) A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とする. 次式が成り立つ事を示せ. $\qquad e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^AP$

[6] 次の各 3 次実行列 A に対して, 以下の問に答えよ.

$$\text{(i)}\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad\qquad \text{(ii)}\quad A=\begin{pmatrix}-1&-3&0\\3&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad A=PJP^{-1}:\qquad J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1) 微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\,\boldsymbol{x}(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\,\boldsymbol{x}(t)$ の定める流れの概略図を描け.

[7] (1) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_n(\boldsymbol{x}))\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ を局所リプシッツ連続写像として, 微分方程式 $(*)\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ を考える.

(i) 次の用語の定義を記せ: 関数 $G(\boldsymbol{x})\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が $(*)$ の第 1 積分

(ii) 次が成り立つ事を示せ: G が $(*)$ の第 1 積分 $\iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k\,\frac{\partial G}{\partial x_k}=0$

(2) Ω を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の領域とし, $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\colon \Omega\to\mathbf{R}$ を C^2 級関数とする.

(i) H を ハミルトン関数 とする ハミルトン方程式 を記せ.

(ii) H がこのハミルトン方程式の 第 1 積分 になる事を示せ.

[8] $\mathbf{R}^n$ の領域 Ω 上の滑らかな写像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\colon \Omega\to\mathbf{R}^n$ に対して, 微分方程式: $(*)\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ を考える.

(1) 次の用語の定義を記せ.

(i) $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ が $(*)$ の 平衡点

(ii) $(*)$ の 平衡点 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ が 安定, 漸近安定

(iii) $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ における微分行列 $D\boldsymbol{f}$

(iv) $(*)$ の 平衡点 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ が 沈点, 源点, 鞍型平衡点 (双曲型平衡点)

(2) $\boldsymbol{x}_0$ が 双曲型平衡点 のとき, $\boldsymbol{x}_0$ の近傍での $(*)$ の定める流れの特徴を説明せよ (安定・不安定多様体 に関しても説明せよ).

(3) 次の微分方程式の 平衡点 における 安定性 を調べよ. $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t)\cos x(t)-x(t)\end{pmatrix}$

[9] 単振り子 (鉛直平面内のある支点に重さの無視できる長さ ℓ のたるまない糸でつるされた質点) の運動を考える. 時刻 t における下向きの鉛直線と糸の成す一般角を $x(t)$ で表すと, 単振り子に対する ニュートン運動方程式 は次の形になる. $(*)\quad \ddot{x}(t)=-\omega^2\sin x(t)\qquad \left(\omega=\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\right)$

$y(t)=\dot{x}(t)$ として $(*)$ を 1 階化すると, 平面上の次の方程式が得られる.

$$(**)\qquad \begin{cases}\dot{x}(t)=y(t)\\ \dot{y}(t)=-\omega^2\sin x(t)\end{cases}$$

(1) エネルギー関数 $E(x,y)=\dfrac{1}{2}y^2-\omega^2\cos x$ が $(**)$ の 第 1 積分 である事を示せ.

(2) xy 平面上に関数 $E(x,y)$ の (代表的な) 等高線を描け.

(3) $(**)$ の定める流れの概形を描き, 各解曲線が 単振り子 のどのような運動を表しているか説明せよ.

[10] ファン・デル・ポール (van der Pol) 方程式: $\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0\quad(0<\varepsilon<2)$ を

$$y(t)=\dot{x}(t)+\varepsilon\left(\frac{x(t)^3}{3}-x(t)\right)$$

とおいて 1 階化すると, (x,y) 平面上の 次の方程式 $(*)$ と ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が得られる.

$$(*)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(t)-\varepsilon\left(\dfrac{x(t)^3}{3}-x(t)\right)\\ -x(t)\end{pmatrix}\qquad\qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-\varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\\ -x\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{f}$ の 平衡点 を求め, この平衡点での 微分行列 の 固有値 を調べて, 平衡点のまわりでの 解の安定性 を調べよ.

(2) xy 平面上で 方程式 $(*)$ の解の 流れの図 を描き, その特徴 (平衡点, 周期解, 解の漸近挙動, etc.) に関して説明せよ.

[11] (周期軌道とポアンカレ写像) 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ において x 座標を $\mathrm{mod}\,2\pi$ で考える (すなわち, 点 $(x+2n\pi, y, z)$ $(n \in \mathbf{Z})$ は全て同じ点を表すと考える). この空間を D で表す. D は『領域 $[0, 2\pi] \times \mathbf{R}^2$ において 2 つの境界面 $\{0\} \times \mathbf{R}^2$ と $\{2\pi\} \times \mathbf{R}^2$ を自然に同一視したもの』と考えられる. 空間 D 上で実 2 次行列 A に対して, 次の微分方程式を考える.

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = 1, \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

次の各行列 A に対して, 以下の問に答えよ. (i) $A = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/3 \\ 1/3 & 1/5 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} -1/4 & -2 \\ 2 & -1/4 \end{pmatrix}$

(1) この方程式の一般解 $(x(t), y(t), z(t))$ を求めよ.

(2) D 上で $(*)$ の流れの概形を描け.

(3) $(*)$ の閉軌道 $\gamma : \boldsymbol{x}(t) = (t, 0, 0)$ $(t \in \mathbf{R})$ に対して横断面 として yz 平面 $x = 0$ をとり, ポアンカレ写像 g を構成すると, g は yz 平面上のどのような写像になるか. さらに, 写像 g による点の軌道の概形を描け.

14.9 変分法

[1] U を $\mathbf{R}^n$ の領域とし, $L\colon [a,b] \times U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を C^2 級関数とする. 曲線 $\gamma : \boldsymbol{x}(t)\colon [a,b] \to U$ に対して作用汎関数 を $F(\gamma) = \displaystyle\int_a^b L(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))\,dt$ で定義する.

(1) 次の用語の定義を正確に記せ:

(i) 曲線 γ の 端点を固定した変分 γ_ε

(ii) γ_ε の 変分ベクトル場

(iii) γ が 作用汎関数 F の (端点を固定した変分に関する) 停留曲線

(2) 作用汎関数 F の (端点を固定した変分に関する) オイラー・ラグランジュ方程式 を記せ.

[2] 曲線 $\gamma\colon \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ $(0 \le t \le 1)$ に対する エネルギー汎関数

$$E(\gamma) = \int_0^1 x'(t)^2 + y'(t)^2\,dt + \int_0^1 cy(t)\,dt \qquad (c > 0)$$

の 両端を固定した変分問題 $\delta E(\gamma) = 0$ を考える. この変分問題におけるオイラー・ラグランジュ方程式を求め, その解を求めよ.

15. 数理応用解析

15.1 1階偏微分方程式

[1] u を2変数 x, y の関数とする. 次の性質を持つような u を求めよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = y \qquad u(x,\,0) = \cos x$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0 \qquad u(0,y) = \sin y$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u(x,0) = \cos x$

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u \qquad u(0,\,y) = \cos y$

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0 \qquad u(0,y) = \cos y$

(6) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u \qquad u(x,\,0) = \cos x$

[2] 初期曲線 $x = -s,\, y = s,\, u = s \ \ (s \in \mathbf{R})$ を通る線形偏微分方程式 $2u_x + 3u_y = x$ の解を求めよ.

[3] 次の方程式の解を求めよ. $\qquad yu_x + xu_y = u, \quad u(s,0) = 1 \ \ (s > 0)$

[4] 初期曲線 $(x,y,u) = (0,s,s) \ \ (s \in \mathbf{R})$ を通る準線形偏微分方程式 $u_x + 2xuu_y = xu$ の解を求めよ.å

[5] 非線形偏微分方程式 $xu_x + yu_y = u_x u_y$ の解で, x 軸上で $u = \dfrac{x^2}{2}$ を満たすものを求めよ.

15.2 2階線形偏微分方程式

[1] 2変数 x, y の関数 u に関する次の偏微分方程式を解け.

(1) $2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{2x} y$

[2] 2変数 x, y の関数 $u(x,\,y)$ に関する次の2階線形偏微分方程式が双曲型か楕円型か放物型か答え, 双曲型の場合は一般解を求めよ.

(1) $3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 8\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

[3] (1) a を定数とする. 関数 $u = u(\xi,\eta)$ に関する偏微分方程式

$$u_{\xi\eta} = au_{\xi} \qquad \cdots (*)$$

に対し, $v = u_{\xi}$ の満たす方程式を求め, その一般解 v を求めよ. さらに, $(*)$ の一般解 u を求めよ.

(2) 関数 $u = u(x,y)$ に対する偏微分方程式

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = u_x + u_y \qquad \cdots (**)$$

を標準形に直せ. さらに, $(**)$ の一般解を求めよ.

15.3　熱方程式

[1] 周囲を断熱材で囲まれた材質の均一な長さ l の棒がある．左端から測った距離 x $(0 \le x \le l)$ を位置座標にとり，この棒の時刻 t, 位置 x における温度を $u(x,t)$ とする．棒内に熱源がないとき u の満たす方程式は, k を正の定数として

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le l,\ t \ge 0)$$

である．(熱伝導率, 比熱, 密度などは定数で, この方程式が成り立つように適当に決まっているものとする.)

(1) 初期時刻における温度分布が $u(x,0) = g(x) = \begin{cases} U_0 & (0 \le x < l/2) \\ 0 & (l/2 \le x \le l) \end{cases}$ (U_0 は定数) であるとき, 次のそれぞれの境界条件の下で $u(x,t)$ を求めよ．また $t \to \infty$ のときの温度分布はどうなるか.

(i) 恒温境界条件： $u(0,t) = u_0$ 　 $u(l,t) = u_1$ 　 $(t \ge 0)$ 　 (ただし u_0, u_1 は定数)

(ii) 断熱境界条件： $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ 　 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$ 　 $(t \ge 0)$

(2) 定数 k, l 及び初期時刻における温度分布が次で与えられるとき, 断熱境界条件の下での $u(x,t)$ を求めよ．また十分長い時間が経過した後の温度分布はどうなるか.

(i) $k = 9,\ \ l = \pi,\ \ u(x,0) = \sin x \ \ (0 \le x \le \pi)$

(ii) $k = 4,\ \ l = \pi,\ \ u(x,0) = x \ \ (0 \le x \le \pi)$

[2] 長さ L の棒の両端をつないで輪を作る．棒内に熱源はないとする．初期の温度分布が次で与えられるとき, 温度分布の時間変化 $u(x,t)$ を求めよ．ここで $u(x,t)$ は x について周期 L の周期関数であり, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすものとする.

(1) $u(x,0) = \sin^2 \dfrac{\pi}{L}x$ 　 (2) $u(x,0) = \sin \dfrac{2\pi}{L}x$ 　 (3) $u(x,0) = \left(\cos \dfrac{2\pi}{L}x\right)^2$

(4) $u(x,0) = 3 + \sin \dfrac{2\pi x}{L} + \cos \dfrac{4\pi x}{L}$

[3] 方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ 　 ただし $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

の $u(x,y,t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$ $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ の形をした解を全て求めよ.

15.4　波動方程式

[1] 両端固定の長さ L の弦の自由振動を考える．以下で与えられる関数 $f(x)$ に対して, 次の方程式 (WE), 境界条件 (BC) 及び 初期条件 (IC) を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ.

(WE) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L,\ 0 < t)$

(BC) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ 　 (IC) $u(x,0) = f(x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le L/2) \\ L - x & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$ 　 (2) $f(x) = x\,(L - x)$ 　 (3) $f(x) = x(2x - L)(x - L)$

[2] 両端固定の長さ L の弦に外力が働いていて, 次の方程式と初期条件を満たしている.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\frac{\pi}{L}t\sin\frac{2\pi}{L}x \qquad (0 < x < L,\ 0 < t)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

解 $u(x,t)$ を求めよ.

[3] 無限に長い弦の自由振動を考える. 時刻 t における座標 x をもつ位置での平衡からのずれ $u(x,\,t)$ は, 次の方程式を満たすものとする.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0)$$

次の初期条件

$$u(x,0) = \cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin 2x \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ.

15.5 楕円型方程式

[1] a, A を正の定数とする. u は長方形 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \pi$ の上で定義された x, y の関数で, 次の方程式および境界条件を満たしているとする.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \pi),$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 & (0 \leq x \leq a) \\ u(x,\pi) = 0 & (0 \leq x \leq a) \end{cases}, \qquad \begin{cases} u(0,y) = 0 & (0 \leq y \leq \pi) \\ u(a,y) = Ay(\pi - y) & (0 \leq y \leq \pi) \end{cases}$$

このとき $u(x,y)$ を求めよ.

[2] (1) 実数 λ について, 長方形 $D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq z \leq M\,\}$ の内部での方程式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$$

の Dirichlet 境界条件を満たす解, 即ち, D の境界上で恒等的に 0 となる解 $u(x,y)$ を考える. $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ の形をしていて, 恒等的に 0 でない解が存在するためには λ はどのような値でなければならないかを示せ.

(2) 実数 λ について, 直方体 $D = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq M,\ 0 \leq z \leq N\,\}$ の内部での方程式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda u$$

の Dirichlet 境界条件を満たす解, 即ち, D の境界上で恒等的に 0 となる解 $u(x,y,z)$ を考える. $u(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ の形をしていて, 恒等的に 0 でない解が存在するためには λ はどのような値でなければならないかを示せ.

[3] $\mathbb{R}^2$ の極座標 (r,θ) を $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定める．円環領域

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 1<r<2,\ \theta\in\mathbb{R}\}$$

における，関数 $u=u(r,\theta)$ に対する次の境界値問題を考える．

$$\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad (1<r<2,\ \theta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots(*)$$
$$u(1,\theta)=0 \qquad (\theta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots(**)$$
$$u(2,\theta)=f(\theta) \qquad (\theta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots(***)$$

ただし，関数 u, f は θ に関して周期 2π を持つとする．

(1) 関数系 $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を次で定義する．ただし，A_n, B_n は定数である．

$$u_0 = A_0 + B_0\log r, \qquad u_n = (A_n r^n + B_n r^{-n})e^{in\theta} \qquad (n=\pm1,\pm2,\ldots)$$

関数 u_n $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ は $(*)$ の解であることを示せ．また，$u=u_n$ が $(**)$ を満たすとき，A_n を B_n を用いて表せ．

(2) $f(\theta)=1+30\cos 2\theta$ のとき，境界値問題 $(*)$, $(**)$, $(***)$ の解 u を $u=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ とおくことにより求めよ．

16. データサイエンスの数理

16.1 確率母関数と積率母関数

[1] 確率分布 $\{p_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の確率母関数 $\phi(s)$ の定義を述べ, $\phi(1)=1$ を示せ. また, 各 n について p_n を $\phi(s)$ を用いて表せ.

[2] $e^{\lambda(s-1)}$ は, どのような確率分布 $\{p_n\}$ の確率母関数であるか答えよ. ただし, $\lambda>0$ とする.

[3] $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき, $(ps+q)^N$ は, どのような確率分布 $\{p_n\}$ の確率母関数であるか答えよ. ただし, N は自然数とする.

[4] 非負整数値の確率変数 X の確率母関数 $\phi_X(s)$ が $\phi_X(s)=\dfrac{8}{27}+\dfrac{4}{9}s+\dfrac{2}{9}s^2+\dfrac{1}{27}s^3$ で与えられている. 以下の問に答えよ.

(1) X の期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.

(2) X の確率分布はどのようなものであるか答えよ.

[5] 確率変数 X の確率母関数 $\phi_X(s)$ が $\phi_X(s)=\dfrac{s(s^2+2s+3)}{6}$ で与えられている. 以下の問に答えよ.

(1) X の積率母関数 $\psi_X(t)$, 3 次までの積率 $m_k:=E(X^k)$ $(k=1,2,3)$ および分散 $V(X)$ の値を求めよ.

(2) X の確率分布を求めよ.

[6] 確率変数 X の積率母関数 $\psi(t):=E[e^{tX}]$ について答えよ. ただし, $\psi(t)$ はすべての実数 t に対して収束しているとする.

(1) X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ および k 次モーメント $E[X^k]$ を $\psi(t)$ を用いて表せ.

(2) X が非負整数値の確率変数であり, $p_n:=P(X=n)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ とおくとき, 確率分布 $\{p_n\}$ の確率母関数 $\phi(s)$ と X の積率母関数 $\psi(t)$ との関係を示せ.

16.2 スターリングの公式

[1] 平均が λ のポアソン分布に従う確率変数 X に対して, $a_n=\dfrac{P(X=n)^2}{P(X=2n)\,2^{2n}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ とおく.

(1) Stirling の公式を用いて極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n$ を求めよ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}$ が収束するような実数 α の範囲を求めよ.

[2] Stirling の公式を用いて, 次の極限値を求めよ:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(3n)!}{(n!)^3 3^{3n}} \qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(3n)!\,2^{2n}}{(2n)!\,n!\,3^{3n}}$$

[3] 公正なコインを n 回投げた時に表が k 回出る確率は $b(n,k)=\dfrac{1}{2^n}{}_nC_k$ で与えられる.

(1) (中心極限定理) $g(x)$ は 標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数とする. すべての実数 x に対し

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\,b\left(n,\left[\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}x\right]\right)\longrightarrow g(x)$$

が成り立つことを Stirling の公式を用いて示せ.

(2) (大偏差原理)

(i) 関数 $I(x)=x\log(2x)+(1-x)\log(2(1-x))\ \ (0<x<1)$ のグラフの概形をかけ.

(ii) Stirling の公式を用いて, すべての $0<x<1$ に対し次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log b(n,[nx])}{n}=-I(x)$$

16.3 ランダム・ウォーク

[1] a は整数, n は非負整数とする. 点 a から出発する 1 次元対称ランダム・ウォーク $\{W_n\}$ を考える. すなわち, $W_0=a$ とし, 表, 裏が等確率で出るような 1 枚のコインを各時刻 n で投げ, 表が出れば $W_{n+1}=W_n+1$, 裏が出れば $W_{n+1}=W_n-1$ と定める. a, b は非負整数であり, $0<b-a\leqq n$ を満たすとし, $n+b-a$ は偶数とする. 2 種類の確率

$$p_n(a,b):=P(W_n=b\mid X_0=a)$$
$$q_n(a,b):=P(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_{n-1}>0,W_n=b\mid X_0=a)$$

を考える.

(1) (i) $p_3(1,2)$, $p_4(1,3)$ を求めよ. (ii) $p_n(a,b)$ を n, a, b を用いて表せ.

(2) $q_n(a,b)$ を $p_n(a,b)$ を用いて表せ.

(3) (i) $q_3(1,2)$, $q_4(1,3)$ を求めよ. (ii) $q_n(a,b)$ を n, a, b を用いて表せ.

(4) 差 $p_{3n}(n,2n)-q_{3n}(n,2n)$ を n を用いて表せ.

[2] 原点から出発する 1 次元対称ランダム・ウォーク $\{W_n\}$ を考える. ただし, a, b は整数であり $0\leqq a<b$ とする. また, n は非負整数であり $n+a$ は偶数とする.

(1) 確率 $u_n(a):=P(W_n=a)$ を求めよ.

(2) ある $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して $W_k\geqq b$ かつ $W_n=a$ となる確率 $v_n(a,b)$ について, 等式 $v_n(a,b)=u_n(2b-a)$ が示せるが, この等式を示すのに用いる原理を何と呼ぶか答え, その考え方を図示しながら簡潔に説明せよ.

(3) $M_n := \max_{0 \leqq k \leqq n} W_k$ とおく. $P(M_n \geqq b \mid W_n = a) = \dfrac{v_n(a,b)}{u_n(a)}$ となることを示せ.

(4) 条件付き確率 $P(M_5 = 3 \mid W_5 = 1)$ および $P(M_5 = 2 \mid W_5 = 1)$ の値を求めよ.

[3] この問題は, 本質的には, 吸収壁ランダムウォークに関する出題である.

N は 2 以上の自然数とする. $1 \leq k \leq N-1$ を満たす自然数 k から出発する 1 次元対称ランダム・ウォーク $\{W_n\}$ にもとづき, 確率からなる数列 $r(0,k), r(1,k), r(2,k), \ldots$ を, 次の規則で定める.

$r(0,k) = 0$ とし, 自然数 n に対し,

$$r(n,k) = P(1 \leq W_1 \leq N-1, \ldots, 1 \leq W_{n-1} \leq N-1, W_n \in \{0, N\} \mid W_0 = k)$$

とする. また, $k \in \{0, N\}$ の場合には, 次のように定める. n は自然数とする.

$$r(0,0) = r(0,N) = 1 \qquad r(n,0) = r(n,N) = 0$$

添え字 n についての確率母関数を $R(s,k)$ で定める. つまり, $0 \leq k \leq N$ に対し $R(s,k) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n,k) s^n$ と定める.

(1) $R(s,0)$ と $R(s,N)$ を求めよ.

(2) $n \geq 1$, $1 \leq k \leq N-1$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$r(n,k) = \frac{1}{2} r(n-1, k-1) + \frac{1}{2} r(n-1, k+1)$$

(3) 数列 $R(s,0), \ldots, R(s,N)$ が満たす漸化式を求めよ.

(4) 前項の漸化式を解いて, 一般項 $R(s,k)$ を求めよ.

16.4 マルコフ連鎖

[1] $S = \{1,2,3,4,5\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の推移行列 A が次で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) このマルコフ連鎖の状態遷移図を記せ.

(2) 条件付確率 $p_{3,4}^{(2)} := P(X_2 = 4 \mid X_0 = 3)$ の値を求めよ.

[2] $S = \{1,2,3,4,5\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の推移行列 A が次で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) このマルコフ連鎖の状態遷移図を記せ.

(2) 条件付確率 $p_{j,k}^{(2)} := P(X_2 = k \mid X_0 = j),\quad p_{j,k}^{(3)} := P(X_3 = k \mid X_0 = j) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 5)$

を成分に持つ行列を A を用いて表せ. また, それらのすべての成分を求めよ.

[3] この問題では, 前節の 吸収壁ランダムウォークに関する問題 16.3 [3] を, マルコフ連鎖として表現することを目的とする. N は 2 以上の自然数とする. 記号 $r(n, k)$ の意味は, 問題 16.3 [3] と同じである.

$S = \{0, 1, \ldots, N\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の推移行列 A (もちろん $(N+1)$ 次正方行列) をうまく与えて, すべての $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ に対し,

$$r(0, k) + r(1, k) + \cdots + r(n, k) = P(X_n \in \{0, N\} \mid X_0 = k)$$

が成り立つようにせよ.

問題の答え（第１章～第９章、第１１章）

第１章　基礎解析 I

1.1 関数

[1] 略　（ヒント: n に関する数学的帰納法を用いる.）

[2] (1) $-\frac{\pi}{6}$ (2) $-\frac{\pi}{3}$

[3] 略

1.2 極限

[1] (1) e^2 (2) $-\frac{1}{8}$

[2] (1) 1 (2) $\sin 1$ (3) 0 (4) 0 (5) $-\frac{\sqrt{3}}{12}$ (6) 0

[3] (1) 0 (2) $e^{-5/2}$ (3) $-\sqrt{2}$

[4] (1) 0 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$

[5] (1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$

[6] $\frac{x^2}{2}\ \ (|x|<1),\ x\ \ (|x|>1),\ \frac{2}{3}\ \ (x=1),\ 0\ \ (x=-1)$

[7] (1) 2 (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{5}{3}$ (4) 1

[8] (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 1 (5) 1 (6) 1

[9] (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1

[10] 次のような例がある. (1) $a_n=(-1)^n\ \ (n=1,2,\dots)$ (2) $b_{3n}=1,\ \ b_{3n-1}=b_{3n-2}=0\ \ (n=1,2,\dots)$

[11] $\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$

[12] 略　（ヒント: $a_1\le\cdots\le a_n\le b_n\le\cdots\le b_1\quad(n=1,2,\dots)$ を示す.）

[13] (1) 略　（ヒント: 数学的帰納法を用いる） (2) 略 (3) 略 (4) $\gamma=\lim_{n\to\infty} x_n$ は $\gamma=e^{-\gamma}$ をみたす.

[14] (1) 1 (2) 略 (3) 略 (4) 0

[15] $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

[16] (1) 整数全体 (2) 有理数全体

[17] (1) $-1\pm\sqrt{1+a}$ (2) 略

1.3 微分

[1] (1) $200x(x^2-1)^{99}$ (2) $\cos x\cos x^2 - 2x\sin x\sin x^2$ (3) $\log(x^2+x+1)+\dfrac{x(2x+1)}{x^2+x+1}$ (4) $\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$ (5) $\sec x$
(6) $\dfrac{1}{x\log x}$ (7) $x^x(\log x+1)$ (8) $-\dfrac{1}{x^2+1}$ (9) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ (10) $\exp(\mathrm{Sin}^{-1}x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (11) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (12) -1
(13) $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

[2] $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

[3] (1) $y'=(\log x)^2+2\log x$, $y''=\dfrac{2}{x}\{1+\log x\}$ (2) $y'=-\dfrac{1}{x^2+1}$, $y''=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
(3) $y'=(1-2x^2+2x^4-x^6)^{-1/2}(1-2x^2)$, $y''=(1-2x^2+2x^4-x^6)^{-3/2}(-2x+3x^5-2x^7)$

[4] (1) $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ （ヒント: 数学的帰納法を用いる） (2) $\dfrac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(1+2x)^n}$ (3) $x^3\sin\left((x+\dfrac{n\pi}{2})\right)$
$+3nx^2\sin\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)+3n(n-1)x\sin\left(x+\dfrac{(n-2)\pi}{2}\right)+n(n-1)(n-2)\sin\left(x+\dfrac{(n-3)\pi}{2}\right)$
(4) $e^x\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(x+\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2}\right)$ (5) $(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

[5] 略

[6] (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $a=0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+a^2\right)^{\frac{1}{x}}=1$, $a\fallingdotseq 0$ のとき収束せず. (3) $-\dfrac{1}{2}$ (4) 1 (5) e^{-1} (6) -3

[7] 1^∞の不定形　$a_1a_2\cdots a_n$

[8] 略

[9] 略

[10] (1) $f'(x)$ (2) $f''(x)$

[11] (1) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+0((x-a)^2)$ (2) $g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)$
(3) 略 (4) 一つの例: $f(x)=x^3$, $a=0$ とおくと $\theta(x)\to\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[12] 略

[13] (1) (i) 0 (ii) $f'(x)=-(x^2+1)^{-2}(x^2+2x-1)$, $f''(x)=2(x^2+1)^{-3}(x-1)(x^2+4x+1)$ (iii) 略 (2) 略
(3) 略 (4) 略 (5) 略

[14] (1) (i) $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{5}{16}x^2+o(x^3)$ (ii) $x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ (2) $x+2x^2+O(x^3)$ (3) (i) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$
(ii) $x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ (iii) $2x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$ (4) $\dfrac{1}{2}$

[15] (1) 略 (2) $a_0=0$ $a_1=1$ $a_2=2$ (3) 2

[16] (1) $\sin(x+n\pi/2)$ （ヒント: 数学的帰納法を用いる） (2) $f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & (n=2m) \\ (-1)^m & (n=2m+1)\end{cases}$ (3) 略 (4) $-\dfrac{1}{6}$

[17] (1) (i) $x^2+x^4+\dfrac{x^6}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+2}}{n!}+o(x^{2n+2})$ (ii) $2x^2+6x^3+\cdots+(n+1)(n+2)x^{n+2}+o(x^{n+2})$
(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^{k+\ell}}{(2k+1)!(2\ell+1)!}x^{2(k+\ell)+2}+o(x^{2n+1})$ (2) $2x-x^2+\cdots+\dfrac{2(-1)^n}{n-1}x^{n-1}+\dfrac{2(-1)^{n-1}}{n}(1+\theta x)^{-n}$

[18] 略

[19] 正三角形

[20] $\theta'(x) = -\dfrac{2(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+9)}$, $x = \sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{6}$

[21] 略

[22] 略

[23] 略

1.4 積分

[1] (1) $2\log|x-3| - \log|x+1| + C$ (2) $\log|x| - \dfrac{1}{2}\log|1+x^2| + C$ (3) $-\dfrac{1}{7}\log|x+5| + \dfrac{1}{7}\log|x-2| + C$
(4) $\dfrac{1}{2}\log\left\{(x+2)^2+1\right\} - 2\mathrm{Tan}^{-1}(x+2) + C$ (5) $\log|x^2+4x-12| + C$
(6) $\dfrac{1}{2}\log|x+1| - \log|x+2| + \dfrac{1}{2}\log|x+3| + C$ (7) $\log|x+\sqrt{1+x^2}| + \dfrac{2}{x+\sqrt{1+x^2}+1} + C$
(8) $\log\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - 2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + C$ (9) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}-2}{x+\sqrt{x^2+4}+2}\right| + C$ (10) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2} + C$
(11) $3t + \log|t-1| - \dfrac{1}{2}\log(t^2+t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$ (ここで $t = \sqrt[3]{x+1}$) (12) $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$
(13) $\dfrac{1}{2}\left\{\tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}\right\} + C$ (14) $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x + C$ (15) $\dfrac{1}{5}(\log x)^5 + C$ (16) $\dfrac{1}{2}x\left\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\right\}$

[2] (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{1}{2}\log|x-1| - \log|x| + \dfrac{1}{2}\log|x+1|$ (3) $2\log\left|\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{4}{1+\tan\frac{x}{2}}$ (4) $-2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$
(5) $\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|$ (6) π
(7) $\dfrac{1}{4}\left\{x+\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{a^4}{(x+\sqrt{x^2+a^2})^3}\right\}$ (8) $\dfrac{2}{a^2-b^2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{a+b}{a-b}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

[3] (1) $I_n = (x\log -x)(\log x)^{n-1} - (n-1)(I_{n-1} - I_{n-2}),\ I_3 = x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x(\log x) - 6x$
(2) $K_n = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)K_{n-2},\ K_3 = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x$

[4] $-\log 3$

[5] (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\log 2$ (3) $-\dfrac{1}{32}\log 3 - \dfrac{1}{16}\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e}$ (5) $\log 2$ (6) $\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$ (7) $\sqrt{2}\pi$ (8) 1
(9) $\dfrac{\pi}{2} - 1$

[6] (1) $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ $I_1 = \dfrac{1}{2}\log 2$ (2) $I_n = \dfrac{1}{n-1} - I_{n-2}$ $(n \geq 2)$ (3) 略

[7] (1) $\dfrac{1}{2}\left\{\log\left|\dfrac{x^2+1}{x^2}\right| - \dfrac{1}{x^2}\right\}$ (2) $\dfrac{1}{2}(1-\log 2)$

[8] (1) 略 (2) 略

[9] (1) $\log 2$ （ヒント: 部分積分に分解し、積分後 log をまとめる） (2) $\dfrac{\pi}{a}$ $(a > 0)$ (3) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (4) $\dfrac{1}{2}\log 2$
(5) π (6) $\dfrac{\pi}{2} + \log(3+2\sqrt{2})$ or $\dfrac{\pi}{2} + 2\log(1+\sqrt{2})$ （ヒント: 積分範囲を分けて考える）
(7) $\dfrac{\pi}{2}$ （ヒント: 置換積分） (8) π （ヒント: 置換積分） (9) $\dfrac{4}{15}$ （ヒント: $\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} = t$ と置換すると意外にきれいな形になる） (10) $\dfrac{\pi}{4}$ （ヒント: $e^x = t$ と置換） (11) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$ （ヒント: 2回部分積分を適用する

と元の積分が出現）(12) $-\dfrac{3}{4}$ （ヒント: $\sqrt[3]{x}=t$）(13) $-\dfrac{\pi\log 2}{2}$ （ヒント: 原始関数は求まらない、三角関数の性質を上手く利用する）

[10] (1) 広義積分可能 （ヒント: $x>1 \Rightarrow \sqrt{x}<x$）(2) 広義積分可能 （ヒント: 積分区間を半分に分けて評価する）(3) 広義積分可能 （ヒント: 原点付近では、$\sin x = x$）(4) 広義積分不可 （ヒント: 原点付近では、$\sin x = x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x^3} \simeq \dfrac{1}{x^2}$）(5) 広義積分可能 （ヒント: $x >> 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^5+x^2+1} \simeq x^{5/3}$）

[11] (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}$

[12] (1) 略 （ヒント: A^2, A^3, A^4 を計算してみる）(2) $\displaystyle 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ （ヒント: マクローリン展開）(3) 略 (4) いずれも 0 (5) いずれも 0 (6) いずれも $\dfrac{1}{2}$ （ヒント: 部分積分を２回行う）(7) $I_n = \dfrac{nI_{n-1}+nJ_{n-1}}{2},\ J_n = \dfrac{nJ_{n-1}-nI_{n-1}}{2}$ (8) 略 (9) $\mathbf{v}_n = (-)^k\dfrac{(4k)!}{2^{k+1}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(n=4k)$, $(-)^k\dfrac{(4k+1)!}{2^{2k+1}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $(n=4k+1)$, $(-)^k\dfrac{(4k+2)!}{2^{2k+2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $(n=4k+2)$, $(-)^{k+1}\dfrac{(4k+3)!}{2^{2k+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(n=4k+3)$ (10) 略

[13] (1) $\dfrac{1}{4}\left\{\log(3+2\sqrt{2})+\sqrt{2}\right\}$ (2) (i) $\dfrac{1}{6}+\log\dfrac{5}{3}$ (ii) $1+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$ （ヒント: $1+x^2=t^2$ と置換）
(3) $\dfrac{1}{2}\log 3$ (4) 6 (5) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$ (6) (i) 8 (ii) $1+\dfrac{1}{3}\log(\sqrt{3}+2)$ (iii) $8a$

[14] (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}-\dfrac{\pi}{48}$ (2) $\dfrac{3}{32}\pi$ （ヒント: 曲線はアステロイド、解法は教科書 p. 77 例 3）(3) (i) 略 (ii) $\dfrac{3}{16}\pi$ （ヒント: 面積は y を変数として積分する）(4) $S=3\pi a^2$ $L=8a$ （ヒント: 教科書 p. 77 例 2, p. 78 3-(3)）

[15] $\dfrac{5}{9}$ （ヒント: 重心では左右のモーメントが釣り合う）

[16] $\dfrac{\pi}{2}$

[17] (1) $n(1-(1/2)^{1/n})$ (2) 略

[18] (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0,\ \int_0^1(-\log x)\,dx = 1$ (2) 略 （ヒント: 区間を等分し、積分値と関数値を高さとする長方形の面積を比較）(3) 略 （ヒント: $f(x)=-\log x$）

[19] (1) 偽 （反例は略）(2) 偽 （ヒント: 定数や変曲点では非成立）(3) 偽 （ヒント：不定形になっていない）(4) 偽 （反例として $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$）

第２章　基礎解析 II

2.1 偏微分

[1] 0

[2] (1) 0 (2) $-\infty$ or 極限は存在しない (3) 極限は存在しない（ヒント: $x=ky^3$ とおいてみる）(4) 極限は存在しない（ヒント: 極座標変換を適用）

[3] (1) (i) 連続 (ii) 不連続 (不定)（ヒント: いずれも極座標変換を適用）(2) (i) (ii) いずれも $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$（ヒント: 偏微分の定義に戻る） (3) (i) 不可 (ii) 不可　（ヒント：(i) 全微分の定義で確認、(ii) 関数の不連続性より）

[4] (1) 0　（ヒント: ルートを log の前に出した方が計算が簡単） (2) 0　（ヒント: Arctan の微分の公式）

[5] 接平面: $z=bx+ay-ab$ 法線: $\begin{cases} b(z-ab)+(x-a)=0 \\ a(z-ab)+(y-b)=0 \end{cases}$

[6] $f_{xx}=-2(1-2x^2)e^{-x^2-y^2},\ f_{xy}=f_{yx}=4xye^{-x^2-y^2},\ f_{yy}=-2(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}$

[7] (1) $\cos v=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin v=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　（ヒント: $x^2+y^2=u^2$） (2) $z_u=\dfrac{xz_x+yz_y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_v=-yz_x+xz_y$（ヒント: 連鎖律の適用） (3) $xz_y=yz_x$　（ヒント: v に無関係なので $z_v=0$）

[8] $(-z_{xx}+z_{yy})r\sin\theta\cos\theta+z_{xy}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-z_x\sin\theta+z_y\cos\theta$

[9] 略　（ヒント: 連鎖律を適用し $f_{rr},\ f_{\theta\theta}$ を求める）

[10] r　（ヒント: ハイパボリックサイン・コサインの定義を確認）

[11] (1) r^2 (2) $\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\ \dfrac{\partial f}{\partial\theta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{r(e^x-e^{-x})}{2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{r(e^x+e^{-x})}{2}$ (3) 略　（ヒント: 連鎖律を適用し左辺を計算する）

[12] (1) 0　（ヒント: $z_x=2xf',\ z_y=2yf'$) (2) 略　（ヒント: $\Delta z=z_{xx}+z_{yy}=0$ を示す）

[13] (1) $\Delta f=g''+\dfrac{2}{r}g'$ (2) $g=\dfrac{C_1}{r}+C_2$ （ヒント: 微分方程式を解く）

[14] (1) $(0,0)$ と $(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ が候補点、$(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3})$ で極大値 $\dfrac{64}{27}$　（ヒント: 原点での判定は $y=-x$ とおいてみる）(2) (i) $(-1,1)$ で極小値 $-\frac{1}{e}$　（ヒント: 停留点 $(1,0)$ では極値をとらない） (ii) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $\dfrac{1}{2e},\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$ (3) 略 （ヒント: 停留点は $(0,0),\ (1,0),\ (-1,0)$ で、後ろの 2 点で極大値）

[15] (1) $f'=-\dfrac{x^2+ay}{ax+y^2},\ f''=-\dfrac{2xy(x^3+3axy+y^3-a^3)}{(ax+y^2)^3}$　（ヒント: 陰関数の定理） (2) $y'=-1,\ y''=-2$（ヒント: $y''(0)$ は $y'(0)$ を利用すると計算が簡略化できる）

[16] (1) $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{20}{9},\ \left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$ で極大値 $-\dfrac{16}{9}$　（ヒント: 原点では非極値） (2) $x=0$ で極小値 1　（ヒント: 2 階微分で極値を判定する） (3) $(0,1)$ で極値 2　（ヒント: ラグランジュの未定乗数法）

[17] (1) $(0,0),\ \ (\pm\sqrt{2},0)$　（ヒント: ラグランジュの未定係数法） (2) $\left(\sqrt{\dfrac{p}{p+q}},\sqrt{\dfrac{q}{p+q}}\right)$ で極大（最大）値 $\dfrac{1}{2}\left\{p\log p+q\log q-(p+q)\log(p+q)\right\}$ (3) $(0,\pm1),\ (\pm1,0)$ で最小（極小）値 0, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大（極大）値 $\dfrac{1}{4}$　（ヒント: 単位円は有界閉集合なので、最大・最小値が存在する）(4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大（極大）値 $\dfrac{1}{2},\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最小（極小）値 $-\dfrac{1}{2}$　（ヒント: 単位円は有界閉集合なので、最大・最小値が存在する）

[18] 略

[19] (1) 最小値 $\dfrac{8}{45}$, $a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$ (2) 最小値 $\dfrac{8}{175}$, $a=0,\ b=-\dfrac{3}{5},\ c=0$

[20] (1) $\angle\mathrm{AOB} = 2\pi-(x+y),\ 0<x,y<2\pi,\ 0<x+y<2\pi$ (2) $\triangle AOB = -\dfrac{1}{2}\sin(x+y),\ \triangle BOC = \dfrac{1}{2}\sin x,\ \triangle AOC = \dfrac{1}{2}\sin y$ (3) 正三角形

2.2 微分方程式

[1] (1) $y=\dfrac{Cx}{x+1}$ (2) $\log|y| = x\log x - x + C$ or $y=\dfrac{Cx^x}{e^x}$ (3) $y=\dfrac{2}{2-e^{x^2}}$

[2] (1) $y=Ce^x$ （ヒント: 変数分離形） (2) $y=Ce^{x^2}$ （ヒント: 変数分離形） (3) $y=Ce^{-x^{-2}}$ （ヒント: 変数分離形） (4) 一般解 $y^2=-\dfrac{3}{2x^2+C}$, 特異解 $y=0$ （ヒント: 変数分離形） (5) 一般解 $y=-\dfrac{x}{1+Cx}$, 特異解 $y=0$ （ヒント: 変数分離形） (6) $\mathrm{Tan}^{-1}y = \mathrm{Tan}^{-1}x + C$ or $y=\tan(\mathrm{Tan}^{-1}x+C)$ （ヒント: 変数分離形）

[3] (1) $y=-(x+1)+Ce^x$ （ヒント: １階線形微分方程式 or $x+y=z$） (2) $y=\dfrac{-(\cos x + a\sin x)}{1+a^2}+Ce^{ax}$ （ヒント: １階線形微分方程式） (3) $y=1+Ce^{\cos x}$ （ヒント: １階線形微分方程式 or $y+1=z$）

(4) $y=-x^3\cos x + x^2\sin x + Cx^2$ （ヒント: １階線形微分方程式） (5) $y^2=2x^2\log|x|+Cx^2$ （ヒント: 同次形） (6) $y^2=-6x^2\log|x|+Cx^2$ （ヒント: 同次形） (7) $x^2+y^2=Cx^3$ （ヒント: 同次形） (8) $y=\dfrac{1}{(x+1)+Ce^x}$ （ヒント: ベルヌーイ型）

(9) $y=\dfrac{-1}{(x-1)+Ce^x}$ （注: 特異解は $y=0$） （ヒント: ベルヌーイ型） (10) $y=\mathrm{Tan}^{-1}(x+y)+C$ （ヒント: $y+x=z$ とおく）

[4] $z'-\dfrac{2}{x}z=x^2,\ \left(z=-\dfrac{1}{2y^2}\right)$

[5] (1) $\dfrac{1}{3}x^3-2xy+\dfrac{1}{3}y^3+C=0$ (2) (i) $xy+C=0$ （ヒント: 完全形 or 変数分離） (ii) $y=Cx$ （ヒント: 変数分離）

[6] (1) $\dfrac{1}{b}e^{bx}+C$ (2) $I_{n+1}=\dfrac{1}{b}(x-a)^{n+1}e^{bx}-\dfrac{n+1}{b}I_n$ (3) $y^2=2(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$

[7] (1) 略 (2) $y=x-1$ (3) 略 (4) $y=\dfrac{(x-1)^5}{Q(x)+Ce^{-5x}}+x-1$ ここで $Q(x)=-\dfrac{1}{5^5}(5^4x^4-19\times 5^3x^3+132\times 5^2x^2-389\times 5x+389)$

[8] (1) 略 (2) 略 (3) $y=-\dfrac{1}{3}e^{-x}+Ce^{-(3e^x+x)}$ （ヒント: １階線形微分方程式） (4) $y=e^x-\dfrac{3e^x}{1+Ce^{-3e^x}}$

[9] (1) $\alpha\geq 0$ のとき $\lambda=\pm\sqrt{\alpha}$, $\alpha<0$ のとき $\lambda=\pm\sqrt{\alpha}\,i$ (2) $\alpha>0$ のとき $y=C_1e^{\sqrt{\alpha}\,x}+C_2e^{-\sqrt{\alpha}\,x}$, $\alpha<0$ のとき $y=C_1\sin\sqrt{\alpha}\,x+C_2\cos\sqrt{\alpha}\,x$, $\alpha=0$ のとき $y=C_1x+C_2$ (3) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\cos 2x$

(4) $\begin{cases} y=0, & \alpha\text{は任意} \\ y=C_1\sin\sqrt{-\alpha}\,x, & \alpha<0 \text{ かつ } \sin\sqrt{-\alpha}=0 \end{cases}$

[10] $\dfrac{e^x}{5}+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$

[11] (1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+6$ (2) $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)+x^2+2x+1$ (3) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+2x^2+11x+\dfrac{35}{2}$
(4) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$ (5) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{6}e^{-x}$ (6) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-\dfrac{1}{2}xe^{2x}$

(7) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \dfrac{1}{7} e^{2x}$ （ヒント: 特殊解は $y = Axe^{2x}$ とおく） (8) $y = C_1 + C_2 e^x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right) e^x$ （ヒント: 特殊解は $y = (Ax^2 + Bx)e^x$ とおく） (9) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} - (\log x)e^{2x}$ （ヒント: 特殊解は $y = A(\log x)e^{-2x}$ とおく） (10) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \dfrac{x \cos 2x}{2}$ （ヒント: 特殊解は $y = Ax \sin 2x + Bx \cos 2x$ とおく）

(11) $y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)e^{2x} - \dfrac{1}{4}(\cos 2x)xe^{2x}$ （ヒント: 特殊解は $y = (Ax \sin 2x + B \cos 2x)xe^{2x}$ とおき丁寧に計算する）

[12] $y = \dfrac{2}{3}\sin x + \cos x - \dfrac{1}{3}\sin 2x$

[13] (1) (i) $b_{2n} = 0$ $b_{2n+1} = (-4)^n$ (ii) $A^{2n} = (-4)^n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{2n+1} = (-4)^n \times A$ (iii) $e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}$ （ヒント: 三角関数のマクローリン展開） (2) (i) 略 (ii) $y = C_0 \cos 2x + C_1 \sin 2x$

第３章　線形代数学 I

3.1 複素平面

[1] (1) $\theta = \dfrac{2}{5}\pi,\ |\alpha| = 1$ (2) 略

[2] (1) $\theta = \dfrac{1}{5}\pi,\ |\alpha| = 1$ (2) 略

[3] $n = 4, 8, 12$ （ヒント: 極形式で表現するとよい）

[4] $n = 4, 8, 12$ （ヒント: 極形式で表現するとよい）

3.2 ３次元ベクトル

[1] (1) 順に 0, 0, 1 (2) (i) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) 略 (4) (i) 略 (ii) 略 （ヒント: ノルムを内積で表現する） (5) $s = -\dfrac{1}{6},\ t = \dfrac{1}{3}$ のときに最小値 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ （ヒント: 直交関係に注意） (6) 略 （ヒント: (3) を利用し $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OP}\right) = \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ を示すとよい）

[2] $(20, -4, -12)$ or $(-20, 4, 12)$

3.3 行列の計算

[1] (1) $\begin{pmatrix} 6 & 11 & -1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17 & -17 \\ 6 & 27 \\ -14 & 39 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 11 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17 & 0 \\ -11 & 10 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$ （ヒント: 転置行列であるが答えは異なる）

[2] (1) ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tA\,{}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) 略

[3] $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$

3.4　連立１次方程式

[1]　$k=1,\,2$ のときに解 ${}^t(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5) = {}^t(s,\,t,\,k-s-3t,\,2k+1-3s-6t,\,-k+s+2t)$　$(s,t\in\mathbb{R})$

[2]　$a=-4$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

[3]　(1) $b_3-b_2+b_1 = 0$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3s \\ 3t \\ -b_1+2b_2-3s-4t \\ b_1+b_2-3s-5t \end{pmatrix}$ (2) $b_3-b_2+b_1 = 0$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \frac{b_1+b_2-3s-5t}{3} \\ \frac{-b_1+2b_2-3s-4t}{3} \end{pmatrix}$　（ヒント: (1) で x_3 と x_4と入れ替え） (3) (2) と同じ問題

[4]　(1) $a=9$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \frac{-8+2s+4t}{3} \\ \frac{1-s-2t}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $a=8$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \frac{-8+2s+4t}{3} \\ \frac{1-s-2t}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$　（ヒント: (1) と同じ連立方程式となる）

[5]　(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5　逆行列

[1]　(1) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

[2]　(1) 正則、逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) 非正則 (3) 正則、逆行列は ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
（ヒント: (1) の転置行列） (4) 非正則　（ヒント: (2) の転置行列）

[3] (1) 非正則で階数は 3 (2) 正則、逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

[4] $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} & -1 \end{pmatrix}$

[5] $\det A \fallingdotseq 0, \quad A^{-1} = QP$

3.6 行列式

[1] (1) 0 (2) 5 (3) 0 （ヒント: 2 行目と 4 行目が同じ） (4) -2 (5) 5 (6) 3

[2] (1) 0 (2) 0 （ヒント: (1) の列を入れ替えた行列式） (3) $12 + 20\,i$

[3] (1) $165a^2 + 210$ (2) $48a^2$ (3) $x^{n-1}(x + a_1^2 + \cdots + a_n^2)$ （ヒント: 列の和を行列式の和とする）

[4] (1) $(a_2c_4 - a_4c_2)(b_1d_3 - b_3d_1)$ (2) $(a-b)^3(a+3b)$ (3) $(a_1c_3 - a_3c_1)(b_2d_4 - b_4d_2)$

[5] (1) $0,\ -6$ （ヒント: 非正則と行列式 $= 0$ は同値） (2) $0,\ 6$ （ヒント: (1) で x を $-x$ に置き換える）

[6] (1) $0,\ \pm\sqrt{2}$ （ヒント: ランクが 3 でない = 非正則 =「行列式 = 0」） (2) $0,\ \pm\sqrt{2}$ （ヒント: ランクが 3 でない = 非正則 =「行列式 = 0」）

[7] (1) $1 \pm \sqrt{3}$ （ヒント: 並べてできる行列が正則でない） (2) $-1,\ 2$ （ヒント: 並べてできる行列が正則でない）

[8] (1) $-1,\ 3$ (2) $0,\ \pm\sqrt{2}\,i$ （注意: 実数に限定した場合には 0 ）

[9] 略 （ヒント: 行列式に関する基本的性質を利用する）

[10] 略 （ヒント: 行列式に関する基本的性質を利用する）

[11] (1) 略 （ヒント: $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ は基本変形により $\begin{pmatrix} A-B & O \\ B & A+B \end{pmatrix}$） (2) 略 （ヒント: $\det PQ = \det P \det Q$ を利用する）

[12] (1) (i) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma) = -1,\ \mathrm{sgn}(\tau\sigma) = 1$ (ii) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma) = -1,\ \mathrm{sgn}(\tau\sigma) = 1$
(2) (i) -1 (ii) -1

[13] (1) $(1,4,5)(2,7,3,6)$ (2) $(1,5)(1,4)(2,6)(2,3)(2,7)$ (3) $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$

[14] (1) $W_{i4} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j \fallingdotseq i} (x_i - x_j)}$ (2) 略 （ヒント: (1) より W の第 4 列ベクトルと、V の行ベクトルとの内積になっている）

[15] (1) (i) $|A|=-1,\ |B|=1,\ |C|=0$ (ii) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&-3\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (2) (i) 3 (ii) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}16\\-5\\1\end{pmatrix}$

(3) (i) 順に 3, 3, 4 (ii) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2-s\\-3\\1-2s\\s\end{pmatrix}$ (iii) 解なし

第４章　線形代数学 II

4.1 ベクトル空間・線形写像

[1] (1) 教科書 p. 88 (2) 教科書 p. 64 (3) 教科書 p. 81

[2] 部分空間　（ヒント: 線形性を示すとよい）

[3] 一次従属　（ヒント: 並べてできる行列の階数を調べる）

[4] 一次従属　（ヒント: 並べてできる行列の階数を調べる）

[5] $U+V$ の次元は 4, 基底は $\{u_1,u_2,u_3,v_1\}$, $U\cap V$ の次元は 1, 基底は $\{u_1+u_2-u_3\}$ or $\{v_1-u_2\}$

[6] (1) $\{a_1,\ a_2\}$ (2) $s\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

[7] (1) 線形独立（１次独立） (2) 2 (3) 線形独立（１次独立）

[8] 教科書 p. 87 参照

[9] (1) 略 (2) $\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&-5&2\end{pmatrix}$　（ヒント: 教科書 p. 94 例題 5.2.1）

[10] (1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\\0&1&i&0\end{pmatrix}$, Im$\varphi$: 次元 2, 基底 $\{e_4,\ e_2+ie_3\}$, Kerφ: 次元 2, 基底 $\{e_1,\ e_2+ie_3\}$

(2) $\begin{pmatrix}0&1&i&0\\1&0&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, Im$\varphi$: 次元 2, 基底 $\{e_1,\ e_2+ie_3\}$, Kerφ: 次元 2, 基底 $\{e_4,\ e_2+ie_3\}$

[11] (1) $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ (2) $\{f_1,\ f_2,\ x^2,\ x^3\}$ or $\{f_1,\ f_2,\ x^2,\ 1\}$

4.2 固有値・固有ベクトル・対称行列・直交行列

[1] (1) 2 のみ　（ヒント: 固有多項式 $=(t-2)^3$）(2) $\left\{s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

[2] (1) 固有値 1, 固有ベクトル $\left\{ s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$, 対角化できない (2) 固有値 1, 2, 3, $P = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\-2 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

（列ベクトルが固有ベクトル） (3) 固有値 -1, -1, -2, $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ （列ベクトルが固有ベクトル）

(4) 固有値 -1, -1, -2, $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ （列ベクトルが固有ベクトル）

[3] (1) $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

(3) $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

[4] $t > 4 \Rightarrow$ 楕円, $t < 4 \Rightarrow$ 双曲線, $t = 4 \Rightarrow$ 2 直線

[5] (1) (a), (b) いずれも $-2, 1, 4$ (2) (a), (b) の順に: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $(\lambda = -2)$, $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ $(\lambda = 1)$,

$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $(\lambda = 4)$ (3) (a) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\\2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}$

(4) (a), (b) いずれも $(-2)^k + 4^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k + 2$

(5) (a), (b) いずれも $2\left\{(-2)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}\left\{4^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}$

[6] (a) (1) 固有値 -1, 5, 対応する固有空間はそれぞれ $\left\{ s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$

(2) $P = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ (3) $-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$

(4) 固有値 -1, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2(x_1 - x_2 + x_3)\\-2x_1 + 5x_2 + x_3\\2x_1 + x_2 + 5x_3\end{pmatrix}$, 固有値 5, $\frac{2x_1 + x_2 - x_3}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

(b) (1) 固有値 -1, 5, 対応する固有空間はそれぞれ $\left\{ s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ s\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \right\}$

(2) $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ (3) $-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$

(4) 固有値 -1, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5x_1 + 2x_2 + x_3\\2x_1 + 2x_2 - 2x_3\\x_1 - 2x_2 + 5x_3\end{pmatrix}$, 固有値 5, $\frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

[7] (1) 略 (2) 略

[8] (1) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ （注: 列を交換した行列も解となる） (2) $P = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i & -3i \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ （注: 列を交換した行列も解となる）

[9] (1) 略 (2) 略

第５章　数学演習 I

5.1 複素数

[1] (1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ (2) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$

[2] (1) $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (2) 8 (3) $2^{1/3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$

[3] (1) $i,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ (2) $z = \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ （複号任意）

[4] (1) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (2) $n = 12k\ (k = 1, 2, \cdots)$

[5] (1) $a = 2\left(\cos\dfrac{1}{3}\pi + i\sin\dfrac{1}{3}\pi\right)$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$ (2) $c = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$
(3) $n = 24$, $|c^n| = 2048$

[6] (1) $a = 2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$, $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ (2) $c = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$
(3) $n = 24$, $|c^n| = 2048$

[7] (1) 単位円を、実軸に沿って、右に 2 だけ平行移動した円の円周 (2) $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} \le \theta < 2\pi$

[8] (1) $(0, i)$ を中心とした半径 1 の円。 (2) 原点 O を通る、傾き 45° の直線 (3) $(3, 0)$ を中心とした半径 $2\sqrt{2}$ の円

[9] (1) 略 (2) 略 (3) $w = \dfrac{-e^{2i(\tau-\theta)}a + e^{2i\tau}(\overline{a} - \overline{b}) + b}{1 - e^{2i(\tau-\theta)}}$ を中心として $2(\tau - \theta)$ の回転

[10] $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $b = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$

[11] $a = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $n = 24$, $|c^{24}| = 2^{36}$

5.2 極限

[1] (1) 略 (2) 略

[2] (1) 1 (2) e^{-5}

[3] 略

[4] 極限は $1 + \sqrt{2}$ （ヒント: 単調性は２乗した項の差を評価する）

[5] (1) 略 (2) 略 （ヒント: $y = \sin x$ と $y = x$ のグラフの関係）

[6] (1) 略 (2) $S_n = \dfrac{1-a^n}{(1-a)^2} + \dfrac{na^n}{1-a}$, $\dfrac{1}{(1-a)^2}$

[7] (1) 1 （ヒント: e の定義式を利用する） (2) e^{-3} （ヒント: e の定義式を利用する） (3) $\log 5$ （ヒント: ロピタルの定理） (4) 1 （ヒント: ロピタルの定理） (5) e^3 （ヒント: e の定義式を利用する） (6) e^2 （ヒント: e の定義式を利用する） (7) 1 （ヒント: e の定義式を利用する） (8) 0 （ヒント: ロピタルの定理） (9) 0 （ヒント: ロピタルの定理） (10) $e^{1/2}$ （ヒント: 対数を取ってからロピタルの定理） (11) 1 （ヒント：対数を取ってからロピタルの定理）

[8] (1) 1 （ヒント: ロピタルの定理） (2) $\dfrac{3}{2}$ （ヒント: ロピタルの定理） (3) $\dfrac{1}{3}$ （ヒント: ロピタルの定理） (4) 1 （ヒント: ロピタルの定理） (5) 1 （ヒント：ロピタルの定理） (6) e （ヒント：ロピタルの定理）

[9] (1) $2(\sqrt{2}-1)$ （ヒント: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の区間 $[n, 2n]$ での面積と比較する） (2) $\log 2$ （ヒント: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の区間 $[n, 2n]$ での面積と比較する） (3) e^{-1} （ヒント: 対数をとり区間 $[0, 1]$ での面積（広義積分）と比較する）

5.3 関数

[1] (1) $\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $\dfrac{\pi}{3}$ (3) $-\dfrac{\pi}{6}\pi$ (4) $\dfrac{\pi}{4}$ (5) 0 (6) $-\dfrac{\pi}{4}$ (7) $\dfrac{5}{6}\pi$ (8) $\dfrac{5}{14}\pi$ (9) $\dfrac{9}{14}\pi$ (10) $\dfrac{\pi}{4}$ (11) $\dfrac{\pi}{4}$

[2] (1) $\dfrac{\pi}{10}$ (2) $\dfrac{4}{5}$ (3) $\dfrac{\pi}{4}$ (4) $-\dfrac{\pi}{4}$ (5) $\dfrac{5}{6}\pi$ (6) $\dfrac{1}{3}$ (7) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ (8) $\dfrac{2}{2\sqrt{3}}$ (9) $\dfrac{9}{14}\pi$

[3] (1) 略 (2) $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

[4] (1) $\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

[5] 略

[6] (1) na^{n-1} (2) 1 (3) 2 (4) e^2 (5) 0 (6) $-\dfrac{1}{4}$

[7] (1) 略 (2) 略 （ヒント： すべてほぼ自明）

[8] (1) $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$ $\sinh x = \begin{cases} \sqrt{\cosh^2 x - 1} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{\cosh^2 x - 1} & (x \leq 0) \end{cases}$ (2) (i) $(1, \infty)$ (ii) 略 (iii) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ グラフは略

[9] 略

[10] 略

[11] 略

5.4 微分

[1] (1) $(x+2)^5(x-2)-5$ (2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (3) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1} x\right)$ (4) $x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ (5) $\log|\tan x|$ (6) $\mathrm{Sin}^{-1}(x^2)$

[2] $f(x) = \begin{cases} -2(n-1)! & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m+1) \end{cases}$ （ヒント： １階微分を部分分数に分解する）

[3] (1), (2) ともに略 （ヒント： 差の関数の２階微分で単調性を導く）

[4] (1) $-\dfrac{1}{6}$ (2) -2 (3) $e^{1/2}$ (4) 1 (5) $\log 3 - \log 2$ (6) 0

[5] $-\dfrac{17}{7}$

[6] (1), (2) ともに略

[7] 最小値はなし 最大値（極小値）は $\dfrac{1}{2e}$ 他は略

[8] (1) $n!(1-x)^{-n-1}$ (2) $3^n e^{3x+1}$ (3) $2^n \sin\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (4) $2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (5) $f' = \log(x+1) + 1,\ \ f^{(n)} = (-1)^n (n-2)!(x+1)^{-n+1}\ \ (n \geq 2)$ (6) $(-1)^n (n-1)!\left\{\dfrac{2}{(x-3)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}$ (7) $(-1)^n(x^2 - 2nx + n(n-1))e^{-x}$ (8) $(-1)^n n!(x-n)/(1+x)^{n+2}$

[9] (1) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (2) $e\left(1 + 3x + \dfrac{3^2}{2}x^2 + \dfrac{3^3}{3!}x^3 + \cdots\right)$ (3) $2x - \dfrac{2^3}{3!}x^3 + \dfrac{2^5}{5!}x^5 - \dfrac{2^7}{7!}x^7 + \cdots$
(4) $1 - \dfrac{2}{2}x^2 + \dfrac{2^3}{4!}x^4 - \dfrac{2^5}{6!}x^6 + \cdots$ (5) $x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{2!}{4!}x^4 - \dfrac{3!}{5!}x^5 + \cdots$
(6) $-\left\{\left(\dfrac{2}{3}+1\right) + \left(\dfrac{2}{3^2}+1\right)x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3^3}+1\right)x^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3^4}+1\right)x^3 + \cdots\right\}$
(7) $x^2 - x^3 + \dfrac{1}{2!}x^4 - \dfrac{1}{3!}x^5 + \dfrac{1}{4!}x^6 - \cdots$ (8) $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 + \cdots$

[10] (1) $1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{8}x^4 + \cdots$ (2) $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{8}x^4 + \cdots$ (3) $-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 + \cdots$ （ヒント: (1) e^x を利用 (2) 分母を有理化 (3) $\cos x = 1 - (1 - \cos x)$）

[11] (1) $1 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{32}x^2 + R_3(x),\ R_3(x) = \dfrac{7}{128}(1+\theta)^{-11/4}x^3\ \ (0 < \theta < x),\ f(0.1) \simeq 1.0240625,\ |R_3(0.1)| < \dfrac{7}{128000} = 0.0000546875$ (2) $1 + \dfrac{1}{2}x^2 + R_3(x),\ R_3(x) = \dfrac{\sinh\theta}{3!}x^3\ \ (0 < \theta < x),\ f(0.1) \simeq 1.005,\ |R_3(0.1)| < \dfrac{1}{6000} = 0.000166\cdots$ (3) $10x + R_3(x),\ R_3(x) = \dfrac{2000}{3!}\cos^{-4}(10\theta)\left\{1 + 2\sin^2(10\theta)\right\}x^3\ \ (0 < \theta < x),\ f(0.1) \simeq 1,\ |R_3(0.1)| < \dfrac{40}{3}$

[12] $1 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{5}{81}x^3$

[13] $1 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots$

[14] 略 （ヒント: 原点の左側では恒等的にゼロなのでべき級数展開できない）

[15] (1) $3x - 5y + 4 = 0$ (2) 略

[16] (1) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(-\dfrac{1}{2}\log x + 1\right)x^{1/\sqrt{x}}$ (2) $\dfrac{1}{x^3}(-2\log x + 1)\,x^{1/x^2}$ (3) -1 (4) -1 (5) $-\mathrm{sgn}(x)\dfrac{1}{1+x^2}$ (6) $\dfrac{1}{1+x^2}$
(7) $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

[17] (1) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$ (2) $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\dfrac{1}{(1+x^2)\mathrm{Tan}^{-1}x}$ (4) $\dfrac{1}{x\log x\ \log(\log x)}$ (5) $-(n-1)!(1-x)^{-n}$

[18] (1) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty,\ \lim_{n\to+\infty} xe^{1-x} = 0$ (2) $f' = (1-x)e^{1-x},\ f'' = -(2-x)e^{1-x}$ (3) $x = 1$ で極大値 1, 最大値は 1, 最小値はなし (4) $f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-x)e^{1-x}$
[19] (1) 1 (2) $\dfrac{1}{6}$ （ヒント: ロピタルの定理）

[19] (1) $f' = 0\ \ (x \leq 0),\ f' = x^{-2}e^{-1/x}\ \ (x > 0)$ （ヒント: ロピタルの定理）

[20] (1) $f^{(n)} = e^x$, $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + R_{n+1}$ (2) $g^{(n)} = (-1)^{n-1}3^n(n-1)!(1+3x)^{-n}$, $g(x) = 3x - \dfrac{1}{2}(3x)^2 + \dfrac{1}{3}(3x)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(3x)^n + R_{n+1}$ (3) $h^{(n)} = -2^{n-1}\sin\left(2x + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$, $h(x) = 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}(2x)^2 + \dfrac{1}{4!} \times \dfrac{1}{2}(2x)^4 - \cdots + (-1)^m \dfrac{1}{(2m)!} \times \dfrac{1}{2}(2x)^{2m} + R_{2m+1}$

[21] (1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2}x + \dfrac{1}{2^3}x^2 - \dfrac{1}{2^4}x^3 + \dfrac{1}{2^5}x^4 - \dfrac{1}{2^6}x^5 + \dfrac{1}{2^7}x^6 + R_7$ (2) $e + ex^3 + \dfrac{e}{2}x^6 + R_7$

[22] (1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2^3}x^2 + \dfrac{1}{2^4}x^3 + R_4$, $R_4 = -\dfrac{5}{2^7}(\theta+1)^{-7/2}x^4 \quad (0 < \theta < 1)$, (2) $\dfrac{5}{2^7}\left(\dfrac{1}{50}\right)^4$

(3) $f\left(\dfrac{-1}{50}\right) \simeq 0.9899495$

5.5 積分

[1] $\dfrac{-x+1}{x^2+1} + \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$

[2] (1) $\dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{3}{3x-1}$ (2) $\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+5}{x^2+4x+5}\right)$

[3] $x\mathrm{Tan}^{-1}x - \dfrac{1}{2}\log|1+x^2|$ （注: log の中は絶対ではなく括弧でもよい）

[4] (1) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right|$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{2}x$ (3) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|$

(4) $\dfrac{1}{3}\log|x+1| - \dfrac{1}{6}\log|x^2-x+1| - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ (5) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x-2}{2}$

(6) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2\log\left|\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right| + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}\right)$

(7) $3\sqrt[3]{x+1} - \log|\sqrt[3]{x+1}-1| + \dfrac{1}{2}\log|\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1| + \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{x+1} + \dfrac{1}{2}\right)$

(8) $\log\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (9) $xe^x - e^x \quad (x \geq 0), \quad -xe^x + e^x \quad (x < 0)$ (10) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\sin x + (1+\sqrt{2})(\cos x + 1)}{\sin x + (1-\sqrt{2})(\cos x+1)}\right|$ (12) $x\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ (13) $\dfrac{1}{4}\left(2x^2\mathrm{Sin}^{-1}x + x\sqrt{1-x^2} - \mathrm{Sin}^{-1}x\right)$

(14) $\dfrac{1}{2}\left(x^2\mathrm{Tan}^{-1}x - x + \mathrm{Tan}^{-1}x\right)$ (15) $\dfrac{1}{4}\left(2x^2\cosh 2x - 2x\sinh 2x + \cosh 2x\right)$

(16) $\log(\cosh x)\,\cosh x - \cosh x$

[5] (1) $\mathrm{Tan}^{-1}(x+1)$ (2) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \mathrm{Tan}^{-1}x\right)$ (3) $\log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\right|$ (4) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \log\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \log\left|\dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right|$

[6] (1) $2\log\left|\dfrac{1+x}{x}\right| - \dfrac{1+2x}{x(1+x)}$ (2) $\log\left|\dfrac{x}{1+x}\right| + \dfrac{2x-1}{2x^2}$ (3) $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right| - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

(4) $\log|2+\cos x| + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (5) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}(2\tan x)$ （ヒント: $\tan x = t$ の置換）

(6) $-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}} + (x+2)\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$ (7) $\log\left|1+x+\sqrt{x^2+2x+3}\right|$ (8) $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)^2$ (9) $\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)^3$

[7] (1) $\mathrm{Tan}^{-1}(x+1)$ (2) (i) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right) + \dfrac{1}{2(x-1)^2}$ (ii) $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{1}{2(x-1)}$

[8] (1) (i) $\dfrac{4}{3}$ (ii) $\mathrm{Tan}^{-1}(\sin x)$ (2) (i) $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

[9] (1) $x^2+2x+\dfrac{1}{4}\log\left|(x-3)^{27}(x+1)\right|$ (2) $\dfrac{1}{3}x^3\mathrm{Tan}^{-1}x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\log\left|1+x^2\right|$
(3) $2\sqrt{x+1}+\log\left|\dfrac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}\right|$ (4) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3}{2}\left(\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

[10] (1) $2x+\dfrac{3}{2}\log\left|x^2-3x+5\right|-\dfrac{1}{\sqrt{11}}\mathrm{Tan}^{-1}\left\{\dfrac{2}{\sqrt{11}}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right\}$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2+3x+8\log|x-2|-\log|x-1|$
(3) $x\log(1+x^2)-2(x-\mathrm{Tan}^{-1}x)$ (4) $\dfrac{1}{2}\left(x^2\mathrm{Tan}^{-1}x-x+\mathrm{Tan}^{-1}x\right)$
(5) $3\sqrt[3]{x+1}-\log|\sqrt[3]{x+1}-1|+\dfrac{1}{2}\log|\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1|+\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{1}{2}\right)$ (6) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x-2}{2}$
(7) $-\dfrac{(x+6)}{2}\sqrt{4x-x^2}+6\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$ (8) $\dfrac{1}{5}\left\{\log\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right|-\dfrac{3}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$

[11] (1) 3 (2) $-\dfrac{15}{14}$ （ヒント: 割り算して項別に積分） (3) $\dfrac{21}{10}$ （ヒント: $\sqrt[3]{x-1}=t$） (4) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{32}{27}$ (5) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$
(6) $\log\dfrac{864}{125}$ （ヒント: 部分分数に分解） (7) $4+\pi$ （ヒント: 有理関数の積分法に従って計算） (8) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{8}{5}$
（ヒント: 部分分数に分解） (9) $\dfrac{2\pi}{3}$ （ヒント: $\sqrt{x}=t$） (10) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}-\dfrac{\pi}{48}$ （ヒント: 部分積分） (11) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2$
（ヒント: 部分積分） (12) $1-\dfrac{\pi}{4}$ （ヒント: 部分積分） (13) $\log 2$ （ヒント: $\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$） (14) $\dfrac{\pi}{2}$ （ヒント: $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{x}{1+\cos x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$） (15) $\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$ （ヒント: $\tan\dfrac{x}{2}=t$） (16) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$ （ヒント: $x^2=t$） (17) $\dfrac{\pi}{2}$ (18) $\log 3-\log 2$ （ヒント: $\log 0-\log 0$ の不定形を避ける）

[12] (1) $\log\dfrac{(\sqrt{5}+1)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{5}+3}$ （ヒント: $\sqrt{x^2+1}=t-x$） (2) $\log\dfrac{5}{2}$ （ヒント: $x+\sqrt{x^2+1}=t$） (3) $\log 3-\dfrac{1}{2}$

[13] (1) $2xf(x^2)$ (2) $f(x+1)-f(x)$ (3) $f'(x)$

[14] (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) 1 （ヒント: 部分積分） (3) $\dfrac{a}{a^2+b^2}$ （ヒント: 部分積分を 2 回行い式を整理する） (4) π （ヒント: 上手く置換すると $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$） (5) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ （ヒント: 部分分数に分解）

[15] (1) $\dfrac{1}{6}(1+\log 2)$ （ヒント: 部分積分） (2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1$ （ヒント: $\cos x=t$） (3) $\dfrac{1}{2}(12+4\log 3+\log 5)$

[16] (1) 略 （ヒント: 部分積分） (2) 略 （ヒント: $x=\sin^2\theta$） (3) $I_{2,2}=\dfrac{1}{6}$ $I_{2,3}=\dfrac{1}{12}$ (4) 略

[17] (1) 1 （ヒント: 部分積分） (2) π （ヒント: 部分積分） (3) $\dfrac{\pi}{4}$ （ヒント: $e^x=t$） (4) $-\dfrac{3}{4}$ （ヒント: $\sqrt[3]{x}=t$） (5) $\dfrac{1}{4}$ （ヒント: $\log x=t$） (6) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ （ヒント: $\displaystyle\int\dfrac{dx}{x^3+1}$ の計算はかなり大変→ 5.5-[4]-(4) 参照） (7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{\pi}-1}$ （ヒント: $[2n\pi,2(n+1)\pi]$ の区間に分けて考える） (8) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$ （ヒント: 部分積分を 2 回適用し整理する）

[18] (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) π (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) $\log|2+\sqrt{3}|+\sqrt{3}$ （ヒント: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$ なお，相当計算力が必要）
[19] (1) π (2) $\log\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

[19] (1) $\log\left|2\left(x+\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}\right)\right|-2\,\mathrm{Tan}^{-1}2\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\right)$ (2) $\dfrac{1}{4}\pi$

[20] (1) $-\dfrac{1}{(-\alpha+1)^2}$ $(\alpha<1)$, $-\infty$ $(\alpha\geq 1)$ （ヒント: α で場合分け） (2) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\log 2$ （ヒント: $e^x=t$）

[21] (1) $0 < a < \dfrac{1}{3}$ （ヒント: 被積分関数を x^{-1} と比較） (2) $0 < a < 1$ （ヒント: $\tan x = t$ とし，t^{-1} と比較） (3) $0 < a \leqq 1$ （ヒント: $\sin x \simeq x$ として考える）

[22] (1) 略 （ヒント: 部分積分） (2) $a > 1$ （ヒント: $x^a = t$ の変換を利用する）

[23] (1) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty (-t)^n e^{(\alpha-1)t}\,dt$, $I_{n+1} = -\dfrac{n+1}{1-\alpha} I_n$, $I_3 = -\dfrac{3!}{(1-\alpha)^4}$ (2) $\dfrac{e^{3a} - e^{-3a}}{6}$

[24] (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}\theta\,d\theta$, $I_{n+1} = -\dfrac{2n-1}{2n} I_n$, $I_3 = \dfrac{9}{16}\pi$, (2) $\log(2+\sqrt{3})$

[25] (1) 6 （ヒント: ルートをはずすときに場合分けが必要） (2) π (3) 8 （ヒント: ルートをはずすときに場合分けが必要） (4) $\dfrac{19}{3}a$ （ヒント: $\displaystyle\int f' \cdot f^\alpha dx = \dfrac{f^{1+\alpha}}{1+\alpha}$ を利用する） (5) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$

[26] (1) 略 (2) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$ (3) $\dfrac{1}{6}$

[27] $\dfrac{5}{9}$ （ヒント: 重心では左右のモーメントが釣り合う）

[28] (1)〜(4) 略 (5) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

[30] (1) と (2) 略

[29] (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} L(x) = -\infty$ (2) 略 (3) 略 (4) $E'(y) = E(y)$ (5) 略 （ヒント: 微分の定義より $L'(1)$ となる）

5.6 連立１次方程式

[1] $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[2] (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5s \\ -4+7s \\ s \end{pmatrix}$

[3] (1) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

[4] (1) 1 (2) 2 $(a = -3)$, 3 $(a \fallingdotseq -3)$

[5] $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5s \\ -2+7s \\ s \end{pmatrix}$

[6] (1) $x = -3$, $y = 2$ (2) $x = 1$, $y = 2$

5.7 行列式

[1] 逆転対は $3n-7$ 個, 符合は n が偶数なら -1, 奇数なら 1

[2] (1) -3 (2) 0 (3) $3z^2 - z$ (4) 5 (5) 12 (6) -2 (7) -3

[3] (1) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1-b^2 & -a & ab \\ -a & 1 & -b \\ ab & -b & -1-a^2 \end{pmatrix}$

[4] 略

[5] $a=-3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.8 応用

[1] (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1}$ （ヒント: それぞれを微分した関数のマクローリン展開を求め，項別に積分する）

[2] (1), (2) 略 （ヒント: (1) tan の加法定理， (2) $4\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} = 2\left(\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$ に (1) を 2 回）
(3) 3.2269834

[3] 略 （ヒント: 剰余項に部分積分を適用）

[4] (1) 略 （ヒント: 1 回微分してライプニッツの公式） (2) 0 $(n>0)$, 2 $(k=n=0)$ （ヒント: 部分積分を適用し，x^k の項を消す） (3) 0 $(m<n)$, $\dfrac{2}{2n+1}$ $(m=n)$

[5] (1) 略 （ヒント: 有名な公式） (2) 略 (3) 略 （ヒント: $x^2=t$ とおき，$1/n$ 乗した式で考える） (4) 略 （ヒント: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ に対して $x=\sqrt{n}t$ と置換する）

第 6 章 数学演習 II

6.1 偏微分

[1] (1) 0 （ヒント: 極座標変換を利用する） (2) 不定 （ヒント: 極座標変換を利用するか $y=kx$ と置く）
(3) 不定 （ヒント: 極座標変換を利用するか $y=kx$ と置く） (4) 不定 （ヒント: $y=x$ と $y=0$ を比較する）
(5) 1 （ヒント: 極座標変換し, ロピタルの定理）

[2] (1) 0 1 不定 (2) 0 0 0 (3) 1 1 1 （ヒント: ロピタルの定理）

[3] (1) D の任意の点 P に対し，点 P の近傍 Q が存在し，$Q \subset \mathbb{R}^2$ となる． (2) 略 （教科書 p. 85 を参照）

[4] $f_x(1,1)=1$, $f_y(1,1)=-\dfrac{3}{2}$ （ヒント: まともに偏微分すると計算がかなり大変）

[5] $-f_x\sin\theta + f_y\cos\theta$ （ヒント: 連鎖律）

[6] $z_u = -z_x\sin(u+v) + z_y\cos(u-v)$, $z_v = -z_x\sin(u+v) - z_y\cos(u-v)$ （ヒント: 連鎖律）

[7] 略 （ヒント: 連鎖律）

[8] (1) $z_{xx}=2$, $z_{xy}=3y^2$, $z_{yx}=3y^2$, $z_{yy}=6xy+20y^2$ (2) $z_{xx}=z_{xy}=z_{yx}=z_{yy}=-2\sin(x+y)-(x+y)\cos(x+y)$ (3) $z_{xx}=0$, $z_{xy}=z_{yx}=e^y$, $z_{yy}=(x+y+2)e^y$ (4) $z_{xx}=z_{xy}=z_{yx}=z_{yy}=-\dfrac{2(x+y)}{\{1+(x+y)^2\}^2}$ (5) $z_{xx}=z_{yy}=\dfrac{-2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}$, $z_{xy}=z_{yx}=\dfrac{2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}$ (6) $z_{xx}=z_{xy}=z_{yx}=z_{yy}=\dfrac{8(x+y)}{(1-4(x+y)^2)\sqrt{1-4(x+y)^2}}$

[9] (1) (i) $\Delta z=-(x^2+y^2)\sin(xy)$ (ii) $\Delta z=-\dfrac{2xy(x^2+y^2)}{\{1+(xy)^2\}^2}$ (iii) $\Delta z=0$ (2) $\Delta z=0$

[10] (1) 略 （ヒント: 連鎖律） (2) 略 （ヒント: (1) の結果を利用する） (3) 略 （ヒント: (1) の結果に連鎖律を適用する） (4) 略 （ヒント: (1) と (3) の結果を利用する）

[11] (1) 略 （ヒント: 問 [10]-(4) と同じ） (2) $z=C_1\log r+C_2$ （ヒント: 微分方程式を解く）

[12] (1) $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ (2) 0

[13] (1) 0 (2) 0

[14] (1) -1 (2) u

[15] (1) $-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{v^2}}$ (2) $\dfrac{r}{\cos\theta}$ (3) $2uvw$ (4) $s^2(t-u)+t^2(u-s)+u^2(s-t)$

[16] $1-\dfrac{1}{2}(x+2y)^2\cos(\theta(x+2y))$

[17] (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2-y^2)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2-y)^n}{n!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+2y)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x^2+y^2)^n$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+3y)(x+y)^n}{n!}$

[18] (1) 略 （ヒント: 陰関数の定理より傾きを計算する） (2) 略 （ヒント: 接線と直交することを示す）
[19] (1) $\varphi'=-\dfrac{3x^2+3y-1}{3x+4y^4}$, $\varphi'(2)=-\dfrac{4}{5}$ (2) $\varphi'=-\dfrac{-\sin x-2y^2\sin xy+2\cos y}{2(\cos x-xy\sin xy-x\sin y)}$, $\varphi'(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{2}$ （ヒント: 陰関数の定理）

[19] (1) $\varphi'=-\dfrac{3x^2+6xy+2y^2}{3x^2+4xy+6y}$ (2) $\varphi'=-\dfrac{1-ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$ (3) $\varphi'=-\dfrac{2}{1-e^y}$ (4) $\varphi'=\dfrac{2x+y}{x-2y}$

6.2 極値問題，最大・最小値問題

[1] (1) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ で極小値 $-\dfrac{1}{8}$, $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ で極大値 $\dfrac{3}{8}$ （ヒント: $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ では非極値） (2) $(1,-1)$, $(-1,1)$ で極小値 -2 （ヒント: $(0,0)$ では非極値）

[2] (1) $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$ で極大値 $\dfrac{4}{27}$ (2) $(0,\pm1)$ で極小値 -1 （ヒント: $(0,0)$ では非極値） (3) $(-1,-1)$ で極小値 1 （ヒント: 原点では非極値） (4) $(0,0)$ で極小値 0 （ヒント: 原点以外では正） (5) $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ で極大値 $\dfrac{64}{27}$ （ヒント: 停留点 $(0,0)$ では非極値） (6) $(1,1)$ で極小値 3

[3] (1) 停留点 $(0,0)$, $(2,0)$; $(2,0)$ で極小値 -4 (2) 停留点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$; $(1,1)$, $(-1,-1)$ で極小値 -1 (3) 停留点 $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(\pm1/2,\pm1/2)$ (複合任意); $(1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$ で極小値 $-1/8$, $(1/2,-1/2)$, $(-1/2,1/2)$ で極大値 $1/8$ (4) 停留点 $(0,-1)$, $(1,-3/2)$, $(2,-3)$; $(1,-3/2)$ で極小値 $-\dfrac{5}{4}$

(5) 停留点 $(0,0)$, $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(\pm1,0)$, $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ (複合任意); $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $-\frac{1}{8\sqrt{2}}$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

[4] (1) $(-1,1)$ で極大値 2, $(1,-1)$ で極小値 -2 (2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ で極大値 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ で極小値 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

[5] $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(\pm1,\mp1)$ いずれも複合同順

[6] (1) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $\sqrt{2}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最小値 $-\sqrt{2}$ (2) $(1,1)$, $(-1,-1)$ で最大値 2, $(1,-1)$, $(-1,1)$ で最小値 -2 (3) $(1,2)$, $(-1,-2)$ で最大値 2, $(1,-2)$, $(-1,2)$ で最小値 -2 (4) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (5) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で最大値 $\frac{1}{3}$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ で最小値 -1

[7] (1) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $1+\sqrt{2}$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ で最小値 $-\frac{1}{2}$ (2) $(2,0)$ で最大値 8, $(-1,0)$ で最小値 -1

[8] $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $\frac{3}{2}$, $(0,0)$ で最小値 0

6.3 微分方程式

[1] (1) $-x^4y+Cy=-4$ or $y=\frac{4}{x^4+C}$ （ヒント: 変数分離形） (2) $(C_1x+C_2)\,e^{-x/2}$

[2] (1) $e^{y^2/(2x^2)}=Cx$ （ヒント: 同次形） (2) $y=\frac{1}{\sqrt{(-2x+C)x^2}}$, 特異解: $y=0$ （ヒント: ベルヌーイ形） (3) $y=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)+Ce^{2x^2}}}$, 特異解: $y=0$ （ヒント: ベルヌーイ形） (4) $\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}y^4+C=0$ （ヒント: 完全微分方程式） (5) $\frac{y}{y+x}=Cx$ （ヒント: 同次形，完全微分方程式ではない）

[3] $y=\frac{1}{e^{-x}+1}$ （ヒント: 変数分離形）

[4] (1) $y=n\pi$ (2) $e^x\sin y+\cos y-1=0$

[5] (1) $y'=\frac{3y}{x}$ (2) $xy'=y$

[6] (1) $y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}+1$ (2) $x^2+6xy+y^2=C$

[7] (1) $y=Ce^{-3x}$ （ヒント: 変数分離形） (2) $y=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ （ヒント: 線形１次） (3) $y=\frac{C}{x}$ or $xy=C$ （ヒント: 変数分離形）

[8] (1) $e^y=x^2+C$ （ヒント: 変数分離形） (2) $y^2=-\frac{2}{n+1}x^{n+1}+C$ （ヒント: 変数分離形） (3) $e^{x-y}xy=C$ （ヒント: 変数分離形） (4) $\sin y=Ce^{-\cos x}$ （ヒント: 変数分離形） (5) $y=(x+C)e^{-x}$ （ヒント: １階線形微分方程式） (6) $y=-e^{-x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{2x}$ （ヒント: １階線形微分方程式） (7) $y=Cx^2-x$ （ヒント: 同次形） (8) $e^{y/x}=Cy$ （ヒント: 同次形） (9) $\sin(y/x)=Cx$ （ヒント: 同次形） (10) $y=\frac{-x+C}{\sqrt{1+x^2}}$ （ヒント: １階線形微分方程式）

[9] 略 （ヒント: $C_1f(x)+C_2g(x)$ を左辺に代入して整理する）

[10] (1) $y=C_1e^{\sqrt{7}x}+C_2e^{-\sqrt{7}x}$ (2) $y=C_1\cos\sqrt{6}x+C_2\sin\sqrt{6}x$ (3) $y=(C_1+C_2x)e^x$ (4) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (5) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$ (6) $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

[11] (1) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$ (2) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$ (3) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$ (4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$ (5) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ (6) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{10}(\cos x+\sin x)$ (7) $\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)e^{-x}$ （ヒント: $(Ax+B)e^{-x}$ は特殊解） (8) $\left(\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)e^{-2x}$ （ヒント: $(Ax+B)e^{-2x}$ は特殊解） (9) $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{5}\sin x-\frac{1}{10}\cos x$ (10) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-xe^{-x}+2x-1$ (11) $y=\left(x^3+2x^2+C_1x+C_2\right)e^x$ （ヒント: $(Ax+B)e^x$ は特殊解）

[12] (1) $y=C_1e^{-x}+e^x(C_2\sin x+C_3\cos x)$ (2) $y=C_1e^{-x}+e^x(C_2\sin x+C_3\cos x)+\frac{1}{2}x$ (3) $y=C_1e^x+C_2\sin x+C_3\cos x-x^2+2x-5$

[13] (1) $n=3$ (2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+x^3$

[14] (1) (i) 略 （ヒント: $x=e^t$ と置換する ） (ii) $y=(C_1\log x+C_2)x+x^2$ (2) (i) 略 (ii) $y=C_1(x+1)+C_2e^x+xe^x$

[15] (1) 略 （ヒント: 代入するだけ） (2) 略 (3) 略 (4) $y=C\left(y-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}-\frac{3}{2}$

[16] (1) 略 （ヒント: 代入するだけ） (2) 略 (3) 略 (4) $y=\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+C}+1$

6.4 一次独立・基底

[1] (1) $\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}=\begin{pmatrix}7\\-4\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha}=2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (2) $(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{\gamma})=(\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma},\overrightarrow{\alpha})=(\overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=6$ (3) $(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})\times\overrightarrow{\gamma}=-(\overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha})\times\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\beta}\times(\overrightarrow{\gamma}\times\overrightarrow{\alpha})=-\overrightarrow{\gamma}\times(\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta})=4\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, (\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma})\times\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{\alpha}\times(\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\gamma})=\mathbf{0}$

[2] 一次従属

[3] (1) 一次従属 (2) 一次独立

[4] 一次独立なので基底になる

6.5 固有値・固有ベクトル

[1] (1) $(\lambda^2-\lambda-1)^2$ (2) $\lambda=\pm1$

[2] (1) $\left\{t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ (2) $\left\{s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

[3] (1) $\begin{pmatrix} 1/14 & -1/14 & -3/7 \\ -1/10 & -1/10 & 6/5 \\ 1/35 & 6/35 & 8/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 10 & 24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 4 & 9 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 14 & 2 \\ -1 & 9 & -1 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

[4] (1) 線形部分空間になる (2) 線形部分空間にはならない

6.6 対称行列・直交行列

[1] (1) 4, −2 (2) $\lambda = 4 \to s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2 \to t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & b \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} b & a \\ b & -a \end{pmatrix}$, $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) その転置行列 (5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

[2] (1) １例として $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ （ヒント: これ以外にも多数）

(2) １例として $\begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ （ヒント: これ以外にも多数）

第７章　解析学 I

7.1 重積分

[1] (1) 略　（ヒント: $K = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$ を図示する） (2) $I = \displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^y f(x, y)\,dx \right\} dy$

(3) $\dfrac{1}{2}(e-1)$

[2] $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(x, y)\,dx \right\} dy$ （ヒント: 領域 $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2x - x^2$ 上の重積分と一致）

[3] $I = \displaystyle\iint_E r^2 \cos\theta\,dr\,d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$, $E\colon 0 \le r \le a,\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4}$

[4] (1) $\dfrac{(e-1)^2}{e^3}$ (2) 36 (3) 積分値: $\dfrac{3}{4}$, 順序交換: $\displaystyle\int_1^2 dy \int_y^2 \frac{y}{x}\,dx + \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{y}{x}\,dx$ (4) 積分値: $\dfrac{1}{2}$, 順序交換: $\displaystyle\int_0^\infty dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy$

[5] (1) $\dfrac{2}{15}$ （ヒント: 極座標変換） (2) $\dfrac{1}{\pi}$ （ヒント: 最初に x, 次に y による累次積分） (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ （ヒント: 変数変換 $u = x + y$, $v = x - y$）

[6] (1) 1 （ヒント: 最初に x, 次に y による累次積分） (2) $\dfrac{13}{8}\pi$ （ヒント: 極座標変換） (3) $\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}$ （ヒント: 近似列として $D_n\colon 0 \le y \le x - \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n} \le x \le 1$） (4) $\dfrac{1}{3}$ （ヒント: 近似列として $D_n\colon \dfrac{1}{n} \le x \le 1$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}x$）

[7] (1) $\dfrac{16}{9}$ （ヒント: 最初に x, 次に y による累次積分） (2) $1 - \log 2$ （ヒント: 累次積分） (3) $\dfrac{\pi}{8}$ （ヒント: 極座標変換）

[8] (1) $2\pi\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ （ヒント: 極座標変換） (2) $\dfrac{8}{3}$ （ヒント: 累次積分） (3) 積分値: 2, 順序交換: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^y \sin y\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int_{2y-\pi}^{y} \sin y\, dx$ (4) 積分値: $\dfrac{1}{2}(e^{a^2}-1)$, 順序交換: $\displaystyle\int_0^a dy \int_0^y e^{y^2}\, dx$

[9] (1) 1 （ヒント: 最初に y, 次に x による累次積分） (2) $-\dfrac{1}{100}$ （ヒント: 座標変換 $u=-3x+y$, $v=x+3y$, ヤコビアンに注意） (3) $\dfrac{32}{3}\log 2-\dfrac{28}{9}$ （ヒント: 極座標変換）

[10] $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$ （ヒント: 座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=\dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta$）

[11] (1) $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^6}{24}$ （ヒント: 最初に y, 次に x による累次積分） (2) $\dfrac{1}{2}\left(e^{a^2}-1\right)$ （ヒント: 最初に y, 次に x による累次積分） (3) $\pi\log 5$ （ヒント: 極座標変換） (4) 2 （ヒント: 積分順序の交換） (5) 積分値: $\dfrac{9}{4}$, 順序交換: $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\, dy + \int_1^4 dy \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\, dx$

[12] (1) (i) および (ii) 略 (2) (i) $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{1+n^2}+\dfrac{1}{2n^2}\right)$ （ヒント: 累次積分） (ii) $\dfrac{1}{16}$

7.2 体積・曲面積

[1] (1) 略 (2) $\dfrac{2}{3}a^3$ （ヒント: 累次積分） (3) $\dfrac{8}{45}a^5$ （ヒント: 累次積分）

[2] (1) 略 (2) 略 (3) $\dfrac{a^3}{9}(3\pi-4)$ （ヒント: 累次積分）

[3] (1) $J=abc$ (2) $M=\dfrac{2\pi abc\rho}{3}$ (3) 重心の座標: $\left(0,0,\dfrac{3}{8}c\right)$

[4] 体積: $\dfrac{1}{6}$, 重心の座標: $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ （ヒント: 累次積分）

[5] (1) 体積: $\dfrac{\pi}{3}$, 表面積: $\sqrt{2}\pi$ （ヒント: 極座標変換） (2) $\dfrac{1}{18}(3\pi-4)$

[6] $M=8$, $\overline{z}=\dfrac{37}{36}$

[7] $\dfrac{14}{3}\pi$ （ヒント: 曲面積の公式 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$）

[8] $\dfrac{\pi}{3}$ （ヒント: 球面を $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ と書き，曲面積の公式）

[9] (1) $\displaystyle\iint_K \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$ (2) $K: x^2+y^2\leq 1-h^2$, S の表面積 $=2\pi(1-h)$

[10] (1) $\dfrac{4}{1215}(121\sqrt{11}-49\sqrt{2})$ （ヒント: 表面積の式を累次積分） (2) 1 （ヒント: 表面積の式を累次積分） (3) $4(2-\sqrt{3})\pi$ （ヒント: 表面積の式を極座標に変換）

[11] $4\pi(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))$ （ヒント: 回転体の表面積 $2\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$）

7.3 線積分・面積分

[1] (1) 2 (2) -2 (3) π

[2] (1) 2π （ヒント: パラメータ表示 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$） (2) (i) および (ii) 略 （ヒント: (i) はグリーンの定理，(ii) では C が囲む領域から原点を中心とする小さな円を除いた領域にグリーンの定理を適用）

[3] -4

[4] (1) (i) $\dfrac{1}{2}$ (ii) $\dfrac{1}{2}$ (2) 略

[5] $-\dfrac{1}{2}\pi$ （ヒント: グリーンの定理により重積分で表示し，極座標変換）

[6] (1) $\dfrac{1}{30}$ （ヒント: 面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} dt$） (2) $\dfrac{\pi}{8}$ （ヒント: C を極座標で表し，公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\theta$）

[7] 4π （ヒント: ガウスの定理）

[8] $\dfrac{\pi}{2}$ （ヒント: ガウスの定理で 3 重積分にし，累次積分，極座標変換等を用いる）

[9] (1) $\boldsymbol{x} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$, $dS = a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$ (2) $4\pi a^2$ (3) $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ (4) 4π (5) $\dfrac{12}{5}\pi a^5$ （ヒント: ガウスの定理により 3 重積分にし，次に球面座標に変換して積分）

[10] (1) 略 (2) $\boldsymbol{r}_1 = (1, 0, y)$, $\boldsymbol{r}_2 = (0, 1, x)$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = (-y, -x, 1)$, $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$ (3) $\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ （ヒント: 曲面積の公式） (4) $\dfrac{3}{4}$ （ヒント: $\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S} \rangle = 3xy\, dxdy$ ）

[11] (1) 略 （ヒント: リーマン和の極限） (2) 略 (3) 略

[12] (1) $-\dfrac{1}{6}$ （ヒント: 2 つの線分に分けて積分） (2) $\dfrac{3}{2}$ （ヒント: 2 つの線分に分けて積分） (3) $\dfrac{3}{4}$ （ヒント: パラメータ表示 $x = t$, $y = t$, $(0 \leq t \leq 1)$）

[13] $\dfrac{8}{15}$ （ヒント: 面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} dt$）

[14] (1) 2π （ヒント: パラメータによる積分 $x = \epsilon\cos\theta$, $y = \epsilon\sin\theta$） (2) $Q_x - P_y = 0$ (3) 2π （ヒント: (1) と同じ値）

[15] (1) 4π （ヒント: 面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} dt$ (2) 1 （ヒント: C を極座標で表し，公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} r^2\, d\theta$）

[16] (1) $e + \dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) 2

[17] $L = \dfrac{\pi}{4}$, $\overline{x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$, $\overline{y} = \dfrac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi}$, $S_1 = \pi(2 - \sqrt{2})$, $S_2 = \pi\sqrt{2}$, $I_x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$, $I_y = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$ （ヒント: 回転面の面積は Pappus-Guldin の定理を使うと楽，モーメントは例えば $I_x = \displaystyle\int y^2\, dL$）

[18] (1) 略 （ヒント: $S(D) = \displaystyle\iint_D dxdy$ を極座標に変換） (2) $\dfrac{\pi}{4}$

[19] 略 （ヒント: グリーンの定理により $\displaystyle\int_{\partial D} x\, dy = \iint_D dxdy$）

[19] (1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$ (2) $\dfrac{3\pi}{8}a^2$ （ヒント: 面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} d\theta$ ）

第 8 章　解析学 II

8.1 級数の収束・発散

[1] (1) 発散 （ヒント: $a_n \geq n$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$） (2) 収束 （ヒント: $\dfrac{\log n}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$） (3) 収束 $(a < b)$, 発散 $(a \geqq b)$ （ヒント: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1}$ ） (4) 収束 （ヒント: 定積分による判定法）

[2] (1) 収束し絶対収束もする。 （ヒント: $\dfrac{\log n}{n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$ と比較の定理） (2) 条件収束 （ヒント: 与級数は交項級数で収束，絶対収束については不等式 $\sin\dfrac{\pi}{n} > \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ などを考察 ） (3) 収束し（正項級数なので）絶対収束 （ヒント: ダランベールの判定法） (4) 収束し（正項級数なので）絶対収束 （ヒント: コーシーの判定法）

[3] (1) 略 （ヒント: $a_n \leq 1$ なら，$(a_n)^2 \leq a_n$） (2) たとえば $a_n = \dfrac{1}{n}$

[4] (1) 略 (2) 略 （ヒント: $\dfrac{1}{n} > \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$,, $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ など） (3) 略 （ヒント: $\dfrac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$, $\sin\dfrac{\pi}{n} > \dfrac{\pi}{2n}$ などを用いる）

[5] 略

[6] (i) 収束する （ヒント: ダランベールの判定法 ） (ii) 収束する （ヒント: $\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n} < \dfrac{1}{2(n-1)^{3/2}}$ $(n \geq 2)$）

8.2 関数列・関数項級数 の収束

[1] (1) と (2) 略

[2] (1) 略 (2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (3) 一様収束しない （ヒント: $\sup_{0\leq x} |f_n(x)| = e^{-1}$ を示す）

[3] 略 （ヒント: $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{4}$）

[4] 略 （ヒント: $\left|\dfrac{\cos nx^2}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$）

[5] (1) 略 （ヒント: 優級数判定法） (2) 略 （ヒント: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ は連続関数になる）

[6] 略

[7] (1) 略 (2) (i) 略 (ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (iii) 一様収束する (3) 一様収束する （ヒント: Weierstrass の優級数判定法）

[8] (i) 一様収束する (ii) 一様収束しない （ヒント: それぞれの区間で $M_n = \sup\left|1 - \dfrac{n}{n+x}\right|$ を考える）

8.3 整級数

[1] 略

[2] (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 2 (5) 4 (6) ∞ (7) k^k (8) e^{-2} (9) 1 （ヒント: $|x^{n!}| = |x|^{n!} \leq |x|^n$ $(|x| < 1)$, $|x^{n!}| = |x|^{n!} \geq |x|^n$ $(|x| \geq 1)$ ）

[3] (1) 整数値 $x = 0, \pm1, \pm2, -3$ で級数は収束する (2) e

[4] (1) $f'(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$ (2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$ （ヒント: 無限級数の項別微分と項別積分）

[5] 略 （ヒント: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$ の両辺を微分）

[6] (1) $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x| < \infty)$ (2) $\sin^2 x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x| < \infty)$ (3) $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n$ $\left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$

[7] (1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x| < 1)$ (2) $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $(|x| < 1)$

[8] (1) $\dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}x^n$ $\left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ (2) $(1-2x)^{1/3} = 1 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{40}{81}x^3 + \cdots$
(3) $\mathrm{Tan}^{-1}x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $(|x| < 1)$

8.4 Fourier 級数

[1] 0 $(m \neq n)$, π $(m = n \neq 0)$, 2π $(m = n = 0)$ （ヒント: 三角関数の積和の公式 ）

[2] (1) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (2) $f(x)$ は偶関数, $b_n = 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^n 2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$

[3] (1) 略 (2) $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right\}$ (3) 不連続点 $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ を含まない任意の閉区間において $\widetilde{f}(x)$ に一様収束し，不連続点においては $\dfrac{\pi}{2}$ に収束する．

[4] $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

[5] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx$

[6] $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi}\cos(2m+1)x$

8.5 微分方程式の整級数解法

[1] (1) $y' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$, $y'' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$ (2) $c_n = (n+2)c_{n+2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (3) $y = c_0\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!!} + c_1\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!!}$ (c_0, c_1: 任意定数) (4) 収束半径は ∞

[2] (1) $y'' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$ (2) $(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_{n-1} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (3) $y = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}$ (4) 収束半径は ∞ （ヒント: $t = x^3$ の整級数と考えて収束半径を求める）

[3] $y = x - \dfrac{5}{3}x^3$

第９章　統計数理

以下の略解において、「教科書」とは次の文献を指す。『統計学の基礎』栗栖忠、濱田年男、稲垣宣生共著、裳華房書店 第８版

9.1 確率，条件付き確率，ベイズの定理

[1] $P(A|B) = \dfrac{1}{8}$, $P(A \cap B) \fallingdotseq P(A)P(B)$ なので A と B は独立でない．（ヒント: $P(A \cap B) = 1/2^5$, $P(A)P(B) = 7/2^8$）

[2] (1) 独立でない （ヒント: $P(A \cap C) = 1/36$, $P(A)P(C) = 4/6^3$）(2) 独立 （ヒント: $P(A \cap C) = P(A)P(C) = 1/36$）

[3] (1) $P(A|C) = \dfrac{1}{6}$, 事象 A と事象 C は独立でない (2) 独立

[4] (1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A}$ は S の部分集合の全体, $P(k) = \frac{1}{6}$ $(\forall k \in S)$ (2) 独立でない (3) 独立 （ヒント: $P(C \cap D) = P(C)P(D)$ を示す）

[5] (1) $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $\mathcal{A}$ は S の部分集合の全体, $P(k) = \frac{1}{10}$ $(\forall k \in S)$ (2) 独立である （ヒント: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を示す） (3) 非独立 （ヒント: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ より $P(A \cap C) \fallingdotseq P(A)P(C)$ を示す）

[6] (1) 0.135 (2) $\dfrac{2}{3}$

[7] (1) 0.22 （ヒント: $P(\alpha) = P(\beta \cap \alpha) + P(\overline{\beta} \cap \alpha)$） (2) $\dfrac{7}{11} = 0.636$

[8] $\dfrac{12}{47}$

[9] $\dfrac{15}{29}$

[10] (1) $P_1 = \dfrac{1}{4}$, $P_2 = \dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{7}{5}$

[11] $P_1 = P(U_1|A) = \dfrac{5}{22}$, $P_2 = P(U_2|A) = \dfrac{4}{11}$, $P_3 = P(U_3|A) = \dfrac{9}{22}$ （ヒント: ベイズの定理により $P(U_1|A) = \dfrac{P(A|U_1)P(U_1)}{P(A)}$ など）

9.2 １次元確率分布

[1] (1) $p = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$, $V(x) = 2$ （ヒント: $E(X) = 0$ より $V(X) = E(X^2)$ に注意） (2) $p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{2}$

[2] 略 （ヒント: 有名かつ基本的な問題，二項係数の性質を利用）

[3] (1) $1 - \dfrac{569}{9} 0.6^{10} (\simeq 0.6177)$ (2) $1 - \dfrac{17}{2} e^{-3} (\simeq 0.5768)$ （ヒント: (1) 治る人数を X とおくと X は二項分布に従う，(2) はポアソン分布を利用）

[4] (1) $13e^{-4} \simeq 0.2381$ (2) 40 （ヒント: ポアソン分布を利用: $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ただし $\lambda = E(X) = 4$）

[5] $P(X = k) = {}_{200}\mathrm{C}_k (0.02)^k (0.98)^{200-k}$, $P(X \leq 3) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} {}_{200}\mathrm{C}_k (0.02)^k (0.98)^{200-k}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \dfrac{4^k}{k!} e^{-4} (\simeq 0.4335)$

[6] $\varphi_X(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^\theta}{2}\right)^k = \frac{e^\theta}{2-e^\theta}$, $E(X) = V(X) = 2$ （ヒント: $\varphi'_X(\theta)|_{\theta=0} = E(X)$, $\varphi''_X(\theta)|_{\theta=0} = E(X^2)$）

[7] $M'_X(\theta) = \frac{e^\theta}{11} \times \frac{1-e^{11\theta}}{1-e^\theta}$, $E(X) = 6$ $V(X) = 10$ （ヒント: X の分布は $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ 上の一様分布であり，$p_n = \frac{1}{11}$.）

[8] (1) $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ であり，任意の整数 $k \geq 0$ に対し $P(X = k) > 0$. (2) $E(X) = V(X) = \lambda$ (3) $M(t) = \exp\left\{\left(e^t - 1\right)\lambda\right\}$

[9] 略

[10] (1) 略 (2) $\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$

[11] (1) $F(x) = 1 - e^{-x}$, $f(x) = e^{-x}$ $(x \geq 0)$; $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ $(x < 0)$ (2) $G(y) = 0$, $g(y) = 0$ $(y \leq 0)$; $G(y) = y$, $g(y) = 1$ $(0 < y < 1)$; $G(y) = 1$, $g(y) = 0$ $(y \geq 1)$

[12] (1) Y は $N(2, 9^2)$ に従う，Z は $N(0,1)$ に従う (2) 0.1587 （ヒント: $P(X > 2) = P(Z > 1)$: 標準正規分布表へ） (3) 5.99 （ヒント: $P\left(Z > \frac{c+1}{3}\right) = 0.01$, $P\left(0 < Z < \frac{c+1}{3}\right) = 0.5 - 0.01 = 0.49$）

[13] 0.1151, 0.6107 （ヒント: $Z = \frac{X-250}{0.2}$ は標準正規分布に従う）

[14] (1) 361 人 (2) 77 （ヒント: $Z = \frac{X-60}{20}$ は標準正規分布に従う）

[15] (1) $e^{\frac{t^2}{2}}$, グラフは省略 (2) $f_X(x) = 0$ $(x \leq 0)$, $= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}$ $(x > 0)$

[16] $f(x) = 0$ $(x < 0)$, $= 2x$ $(0 \leq x \leq 1)$, $= 0$ $(x > 1)$, グラフは省略

[17] (1) $K = 2$, $F(x) = 0$ $(x < 0)$, $2x - x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$, 1 $(x > 1)$ (2) $E(X) = \frac{1}{3}$, $E(X^2) = \frac{1}{6}$, $V(X) = \frac{1}{18}$

[18] (1) $c = 5$, $F_X(x) = 0$ $(x \leq 1)$, $= 1 - \frac{1}{x^5}$ $(x > 1)$ (2) グラフは省略, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ (3) $E(X) = \frac{5}{4}$, $V(X) = \frac{5}{48}$ (4) $F_Y(y) = 0$ $(y \leq 0)$, $= 1 - \frac{1}{(y+1)^5}$ $(y > 0)$, $f_Y(y) = 0$ $(y \leq 0)$, $= \frac{5}{(y+1)^6}$ $(y > 0)$ (5) $F_Z(z) = 0$ $(z < 0)$, $= z^5$ $(0 \leq z \leq 1)$, $= 1$ $(z > 1)$, $f_Z(z) = 0$ $(z < 0$ or $z > 1)$, $= 5z^4$ $(0 \leq z \leq 1)$
[19] (1) $f(x) = 0$ $(x \leq 0$ or $x > \pi/2)$, $= \sin 2x$ $(0 < x \leq \pi/2)$, グラフは省略 (2) $P\left(\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $E(X) = \frac{\pi}{4}$

9.3 多次元確率分布，標本分布

[1] $p_X(x) = \frac{1}{4}$ $(x = 0,\ 1,\ 3,\ 4)$, $p_Y(y) = \frac{1}{2}$ $(y = 1,\ 3)$, $E(X) = E(Y) = 2$, $V(X) = 2.5$, $V(Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1.5$

[2] (1) $P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = k - i)P(Y = i)$ (2) $c = p$, $kp^2(1-p)^{k-2}$ （ヒント: X と Y が独立なので $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$）

[3] （以下解答例） (1)$f(x,y) \geq 0$ かつ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ をみたす． (2) 2 次元確率密度関数 $f(x,y)$ が存在し，$P\left((X,Y) \in D\right) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ となる． (3) $P\left((X,Y) \in D\right) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ が成り立つ．

[4] 略

[5] (1) $f(x,y) = \alpha\beta e^{-(\alpha x + \beta y)}$ $(x \geq 0,\, y \geq 0), = 0$ (その他) (2) $1 - 2e^{-3} + e^{-6}$

[6] (1) $g(x) = \dfrac{12}{7}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right)$, $h(y) = \dfrac{6}{7}(y + 2y^2)$ (2) $E(X) = \dfrac{4}{7}$, $E(Y) = \dfrac{5}{7}$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\dfrac{1}{294}$

[7] $E(X) = \dfrac{5}{8}$, $E(Y) = \dfrac{7}{10}$, $E(XY) = \dfrac{13}{30}$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\dfrac{1}{240}$ （ヒント: 周辺分布を求める）

[8] (1) 2 (2) $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{3}{4}$ (3) $-\dfrac{1}{16}$ （ヒント: (1) 全体での積分が 1 になる (2) 周辺分布を求める）

[9] $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{-x}$, $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$ （ヒント: 定義領域を図示し，積分範囲を考える）

[10] e^{-x}, ye^{-y} （グラフは省略） （ヒント: 定義領域を図示し，積分範囲を考える）

[11] $F_Y(y) = 0$ $(y < 0)$, $= y^{1/3}$ $(0 \leq y \leq 1)$, $= 1$ $(1 < y)$, $f_Y(y) = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}$ $(0 \leq y \leq 1)$, $= 0$ (その他) (2) $2\mu_1 - 3\mu_2 + 5$, $4\nu_1 + 9\nu_2 + 4\mu_1^2 + 9\mu_2^2 + 12\mu_1\mu_2 + 20\mu_1 - 30\mu_2 + 25$

[12] (1) $f_X(x) = \dfrac{1}{5}$ $(0 \leq x \leq 5)$, $= 0$ (その他), $f_Y(y) = \dfrac{1}{10}$ $(0 \leq x \leq 10)$, $= 0$ (その他), $f(x,y) = \dfrac{1}{50}$ $(0 \leq x \leq 5$ かつ $0 \leq y \leq 10)$, $= 0$ (その他) (2) 7.5 分 (3) 0.75 （ヒント: 題意より，一様分布で独立）

[13] (1) 0.2266, 0.6554 (2) 0.0401 （ヒント: 独立変数の差は正規分布）

[14] (1) 0.1598 (2) 0.2119 （ヒント: 独立変数の差は正規分布）

[15] (1) 0.5, 0.8185 (2) $N(-2,25)$, $N(4,25)$ (3) 0.7257, 4, 9.8

[16] (1) 0.6687, 0.5 (2) $N(3,25)$, $N(-1,25)$ (3) 0.6554, -1, 9.8

[17] (1) $X+Y: N(200,5^2)$, $X-Y: N(4,5^2)$, $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = 7$, 独立でない (2) 0.2119 (3) 190.2

[17] (1) $N(0,1)$, $N(5,13)$ (2) 0.5, 0.1359 (3) 0.5

[19] (1) 1, 2 (2) 0.3023, 0.5, $N(-3,5^2)$, 1

[18] (1) 略 (2) (i) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{2}$

[19] $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, 0, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

[20] 略（教科書の当該項目を参照）

[21] (1) ア: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, イ: $S = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, ウ: $V = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ (2) エ: 独立, オ: 正規分布, $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, カ: 自由度 $n-1$ のカイ二乗分布, キ: 自由度 $n-1$ の t 分布

[22] $n(\nu + m^2)$, $n(\nu + nm^2)$ （ヒント: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$）

[23] 略（教科書参照）

[24] 0.0445 （ヒント: $Z = \dfrac{L - 4000}{10}$ は正規分布 ）

[25] 0.4718 （ヒント: 二項分布 $Bin(400, 0.1)$ を正規分布 $N(40, 6^2)$ によって近似）

[26] 二項分布 $Bin\left(180, \dfrac{1}{6}\right)$, 30, 25, 半整数補正を適用し 0.5558

[27] 二項分布 $Bin\left(100, \dfrac{1}{2}\right)$, 50 25 半整数補正を適用し 0.8465
[30] 通常の正規近似により 0.1359, (半整数補正を適用した場合は 0.1509)

[28] 通常の正規近似により 0.6826, (半整数補正を適用した場合は 0.6946)

[29] 二項分布 $Bin(400, 0.5)$, 200, 100, 半整数補正を適用し 0.29

[30] 二項分布 $Bin\left(720, \dfrac{1}{6}\right)$, 120, 100, 半整数補正を適用し 0.98

[31] 教科書 p. 84 図 6. 1 参照

[32] (1) 略（教科書 p. 82 参照） (2) $\dfrac{n}{\sigma^2} V_n^2$ （ヒント: $\dfrac{n}{\sigma^2} S_n^2$ は χ^2_{n-1} に従う）

[33] (1) $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$ (2) $n\alpha\beta$, $n\alpha\beta^2$, $\dfrac{1}{(1-\beta t)^{n\alpha}}$ (3) $\dfrac{e^{-t\sqrt{n\alpha}}}{\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n\alpha}}\right)^{n\alpha}}$, $\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$

9.4 区間推定

[1] (1) 標本平均 $= \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{16}}{16}$, 不偏分散 $= \dfrac{1}{15}\left\{(x_1 - 220)^2 + (x_2 - 220)^2 + \cdots + (x_{16} - 220)^2\right\}$
(2) $[218.4,\ 221.6]$ (3) $[217.1,\ 222.9]$

[2] 385 人

[3] $[1006.9,\ 1033.1]$ （ヒント: 標本での分散は利用しない ）

[4] (1) $\overline{x} = 501$, $s^2 = 1.8$ (2) 2 (3) $[0.946,\ 6.667]$

[5] 略 （ヒント: 教科書 p. 101，pp. 108〜109 等を参照）

[6] 略 （ヒント: 教科書を参照）

9.5 点推定

[1] (1) $\dfrac{1}{\lambda}$ (2) $f(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda) = \dfrac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_1 + \cdots + x_n)}$ $(0 < x_1, \ldots, x_n)$, $= 0$ (その他) (3) $L(\lambda) = f(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda)$, $\ell(\lambda) = -n \log \lambda - \dfrac{1}{\lambda}(x_1 + \cdots + x_n)$ (4) 尤度関数を最大にする λ, $\hat{\lambda} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ (5) 観察されたデータが最も出現しやすい確率となる

[2] (1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$
(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} - \dfrac{1}{2}\left\{n \log(2\pi\sigma^2) + \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$ (3) 尤度関数を最大にする μ. $\hat{\mu} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ (4) 観察されたデータが最も出現しやすい確率となる

[3] $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ （ヒント: 対数を取って微分する）

[4] 前半省略, $E\left((\hat{W}_A-1)^2\right)=\dfrac{5}{18}$, $E\left((\hat{W}_B-1)^2\right)=\dfrac{1}{4}$, $\hat{W}_B$ の方が小さい （ヒント: W の値別に, $\hat{W}_A$, $\hat{W}_B$ の確率を求める.）

[5] 順に μ, $\dfrac{\sigma^2}{2}$, μ, σ^2, $\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\dfrac{(n-1)\sigma^2}{n}$ (2) 平均が推定元の値と一致する統計量, S_n^2 以外は全て不偏推定量 (3) 不偏推定量のなかで分散を最小にするもの, 有効推定量は $\overline{X}_n$

[6] (1) $\sigma^2\cos(\alpha-\beta)$ (2) 0, $\dfrac{\pi}{2}$ (3) μ, σ^2, $\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\dfrac{(n-1)\sigma^2}{n}$ (4) $\overline{X}_n$ （ヒント: 教科書 p. 94 にある有効推定量の説明）

9.6 推定と検定

[1] 略 （ヒント: 教科書参照）

[2] 略

[3] 略 （ヒント: 教科書 p. 122 以降を参照）

[4] 1 % レベルで仕様書通りではない, [25.1, 25.5]

[5] 再調整不要 （仮説は棄却されない） （ヒント: 仮説「再調整不要」=「母平均 = 300」）

[6] 再調整不要 （仮説は棄却されない）

[7] 短縮効果を認める （仮説は棄却される） （ヒント: 仮説「短縮効果はない」=「平均タイム = 58.8」）

[8] (1) 8, 16.1, 0.32 (2) [15.12, 17.08] (3) [15.86, 16.34] (4) 5 % は棄却, 1 % は棄却できない

[9] (1) 標本の大きさ 8, 標本平均 4.1, 標本分散 0.32 (2) [3.12, 5.08] (3) [3.86, 4.34] (4) 5 % は棄却, 1 % は棄却できない

[10] (1) $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=3.6$, $V=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=0.25$ (2) [3.208, 3.992] (3) [2.979, 4.221] (4) 5 % は棄却, 1 % は棄却できない (5) 棄却できない

[11] (1) $\overline{X}=\dfrac{1}{8}(X_1+X_2\cdots+X_8)$, $U^2=\dfrac{1}{7}\left\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_8-\overline{X})^2\right\}$ (2) 8, 6.3, 0.32 (3) [6.006, 6.594] (4) [5.827, 6.773] (5) 5 % は棄却, 1 % は棄却できない

[12] (1) 略 (2) 5, 10.3, 1 (3) [9.32, 11.28] (4) [8.912, 11.688] (5) 5 % でも 1 % でも棄却できない

[13] 説明書通りではない（帰無仮説: $\mu=100$ は棄却）, 信頼区間 [100.3, 109.7] （ヒント: 標本分散は利用しない. z 値は $z(0.025)$ のみを利用する）

[14] 規格通りではない（仮説は棄却される）

[15] 分散は小さくなっている（仮説は棄却される）

[16] (1) 18.15 (2) [99.99, 104.71] (3) 正しい（正確には「間違っているとはいえない」）

[17] 仮説は棄却される（大きくなっている）（ヒント: 不偏分散を求める）

[18] 略 （ヒント: (1) は片側検定，(2) は等分散性の検定）

[19] 略 （ヒント: (1) は片側検定，(2) は両側検定）

第１１章　応用解析

11.1　１階常微分方程式

[1] (1) $1+y^2=Cx^2$ ($C>0$ は任意定数) (2) $y=-\dfrac{2}{x^2+C}$ (3) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{C}{x}$ $(x>0)$, (4) $y(x)=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{3}+C|x|^{-3/2}$ $(x\fallingdotseq 0)$ (5) $y^2=\dfrac{Cx^4e^{-2x}}{1+Cx^4e^{-2x}}$ （ヒント: (1), (2), (5) は変数分離形, (3), (4) は１階線形微分方程式）

[2] (1) $y(x)=\dfrac{x^4+2x^2-4}{4(x^2+1)}$ (2) $y=\dfrac{2x}{2-x}$ (3) $y=\dfrac{1}{2}\left(x^{4/3}+x^{-2/3}\right)$ （ヒント: (1) と (3) は１階線形微分方程式，(2) は変数分離形）

[3] (1) 略 (2) $u'+\dfrac{2}{x}u+1=0$ (3) $y(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3x^2}{2+x^3}$

[4] (1) $e^{\frac{x^2}{2}}(x+C)$ (C は任意定数) (2) $x\sin y+y^2=C$ （ヒント: 完全微分形） (3) 一般解 $y=Cx+2C-C^2$, 特異解 $\dfrac{1}{4}(x+2)^2$ （ヒント: 両辺を微分し p の微分方程式にする）

[5] (1) (i) $y=\dfrac{Ce^x}{1+Ce^x}$ (ii) $y=\dfrac{Ce^{ax}}{1+Ce^{ax}}$ (2) $y=1+Ce^{-f(x)}$ (3) $y^2=x^2+Cx$ (4) (i) $x\sin y+e^y=C$ (ii) $x^2+e^x\sin y+y^3=C$

11.2　２階常微分方程式

[1] (1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$ (C_1, C_2 は任意定数) （ヒント: 特性方程式の解が -3, 2） (2) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}+(C_1+C_2x)e^{2x}$ (3) $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x+(C_1+C_2x)e^x$ (4) $y=\dfrac{1}{5}e^{2x}+C_1e^{-3x}+C_2e^x$ (5) $y=\dfrac{1}{4}(\cos x+\sin x)+C_1e^x\cos\sqrt{2}x+C_2e^x\sin\sqrt{2}x$ (6) $y=\dfrac{-3}{20}\cos 2x+\dfrac{1}{20}\sin 2x+C_1e^{-2x}+C_2e^x$ (7) $y=\dfrac{1}{34}(4\cos 2x+\sin 2x)e^{-x}+C_1e^x\cos\sqrt{2}x+C_2e^x\sin\sqrt{2}x$ (8) $\dfrac{1}{1-\omega^2}\cos\omega x+C_1\cos x+C_2\sin x$ $(\omega\fallingdotseq\pm 1)$, $\dfrac{x}{2}\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$ $(\omega=\pm 1)$ (9) $\dfrac{1}{1-\omega^2}e^{i\omega x}+C_1\cos x+C_2\sin x$ $(\omega\fallingdotseq\pm 1)$, $-\dfrac{i\omega x}{2}e^{i\omega x}+C_1\cos x+C_2\sin x$ $(\omega=\pm 1)$ （ヒント: (5) は特性解が共役複素数になる場合．特殊解は $y_0=A\cos x+B\sin x$ とおき，方程式に代入してみる．(6), (7) も同様）

[2] $y=2x+1+2xe^{3x}$ （ヒント: 特殊解は $y=Ax+B$ とおき方程式に代入して A, B を決める）

[3] (1) $C^{-3/2}\left\{\sqrt{Cy}\sqrt{4+Cy}-4\log\left|\sqrt{4+Cy}+\sqrt{Cy}\right|\right\}=\pm x+B$ ($C\fallingdotseq 0$, B は任意定数), $y^3=(3x+B)^2$ (B は任意定数) （ヒント: 与式の両辺に y' をかけ，y^2 で割り，積分） (2) $y=e^xz(x)=A(1+x)+Be^x$ (A, B は任意定数) (3) $y=Ax^2e^x+Be^x$ (4) $y=C_1e^{-\cos x+C_2x}$ (C_1, C_2 は任意定数) (5) $y=\dfrac{C_2}{1-C_1e^x}$ (6) $y(x)=x^2+C_1x+C_2x\log x$

[4] (1) 略 (2) $y = \sin x \{\log(1+\sin x) - \log|\cos x|\} - 1 + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (C_1, C_2 は任意定数)

[5] (1) 略 (2) $(1-x)u'' + (3-2x)u' = 0$ (3) $u' = C(x-1)e^{-2x}$, $u(x) = \dfrac{C}{4}(1-2x)e^{-2x}$ (特殊解)
(4) $y(x) = C_1 e^x + C_2(1-2x)e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数)

[6] (1), (2), (3) 略

[7] (1), (2), (3) 略

[8] (1) $v(t)$ は $v' = 10 - 0.1\,v^2$ を満たす．$v(t) = \dfrac{10(e^{2t}-1)}{e^{2t}+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t) = 10$ (3) $x(t) = 10\left\{-t + \log\left(1+e^{2t}\right)\right\}$
（ヒント: $v(t)$ が満たす方程式は変数分離形）

11.3 高階線形常微分方程式

[1] (1) $\dfrac{1}{5}xe^x + (C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x)\,e^x$ (C_1, C_2, C_3 は任意定数) (2) $x^2 - 2x + C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$
(3) $\dfrac{1}{9}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$ (4) $\dfrac{1}{8}x^2 e^x + e^x(C_1 + C_2 x) + e^{-x}(C_3 + C_4 x)$

[2] (1) たとえば，e^x, $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ は基本解系 (2) (i) $\dfrac{1}{2}e^{2x}$ (ii) $e^x\left(\dfrac{x^3}{3} - 2x\right)$ (iii) $\dfrac{1}{10}(-3\cos x + \sin x)$

[3] (1) e^x, xe^x, $\cos x$, $\sin x$ は基本解系 (2) (i) $\dfrac{x^2}{4}e^x$ (ii) $\dfrac{e^x}{12}(x^3 - 3x^2 + 3x)$ (iii) $\dfrac{1}{4}x\cos x$

[4] (1) (i) e^x, xe^x, $e^x\cos 2x$, $e^x \sin 2x$ は基本解系 (ii) $\dfrac{1}{5}e^{2x}$ (iii) $\dfrac{1}{5}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^x \cos 2x + C_4 e^x \sin 2x$
(C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数) (2) (i) $-e^{2x}\sin x$ (ii) $\dfrac{1}{3}\left(x^3 + 3x^2 - 6x - 18\right)$

[5] (1) (i) 略 (ii) $x^m e^{\lambda_i x}$ ($m = 0, 1, \ldots m_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots k$), $x^m e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x$ ($m = 0, 1, \ldots n_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots \ell$), $x^m e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x$ ($m = 0, 1, \ldots n_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots \ell$) (2), (3), (4), (5) 略 （(5) のヒント: $\dfrac{1}{D^2+a^2}e^{iax}$ を計算し実部を取り出す）

[6] (1), (2), (3) 略

[7] (1), (2), (3) 略

11.4 連立常微分方程式

[1] (1) $\begin{cases} 2Dy_1 + Dy_2 - y_2 = e^x \\ Dy_1 + Dy_2 + y_1 = 0 \end{cases}$ (2) $D^2 y_1 + y_1 = e^x$, $y_1 = \dfrac{1}{2}e^x + C_1\cos x + C_2 \sin x$
(3) $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = -e^x - C_1(\cos x + \sin x) + C_2(\cos x - \sin x) \end{cases}$ (C_1, C_2 は任意定数)

[2] (1) $\begin{cases} Dy_1 - 2Dy_2 + y_1 + y_2 = 0 \\ Dy_1 - Dy_2 - y_1 + y_2 = e^x \end{cases}$ (2) $D^2 y_2 - 3Dy_2 + 2y_2 = 2e^x$, $y_2 = -2xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
(3) $\begin{cases} y_1 = -\left(\dfrac{3}{2} + x\right)e^x + \dfrac{C_1}{2}e^x + C_2 e^{2x} \\ y_2 = -2xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x} \end{cases}$ (C_1, C_2 は任意定数)

[3] (1) $e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} x^n$, (この無限級数は任意の行列 A および実数 x に対して収束する) (2) (i) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-3x} + 5C_2 e^x \\ C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意定数) (ii) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + 5C_3 e^x + 5C_4 e^{-x} \\ C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} \end{pmatrix}$ (C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数)

[4] (1) 平衡点は $(0, 1)$, A は正の固有値をもつので解は不安定 (2) $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$, $y_2 = 1 + C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数)

[5] (1) ジョルダン標準形 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} \\ C_1 e^x + C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意定数) (2) $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 + C_2 x) e^{2x} \\ (-C_1 - C_2 x) e^{2x} \end{pmatrix}$ (3) $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $y_1 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{2x}$, $y_2 = (C_2 \cos x - C_1 \sin x) e^{2x}$

[6] (1) $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, ここで $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ (2) 固有値は -1, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $e^{xJ} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2C_1 + C_2) e^{-x} + 2C_2 x e^{-x} \\ 2(C_1 + C_2 x) e^{-x} \end{pmatrix}$

[7] (1) $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, ここで $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ (2) (i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (ii) $e^{xJ} = e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 + C_2 x) e^{-3x} \\ (C_1 + C_2 x) e^{-3x} \end{pmatrix}$

[8] (1) A の固有値は $1 + 2i$, $1 - 2i$, それぞれに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$ (2) $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x & 2\sin 2x \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$, 基本解系は $e^x \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$, $e^x \begin{pmatrix} 2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$ (4) 特殊解は $\frac{1}{5} e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 一般解は $\frac{1}{5} e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 e^x \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意定数)

[9] $u = \frac{a}{6}\left(3\cos\omega x - 3\sin\omega x + 3\cos\sqrt{3}\omega x - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\omega x\right)$,
$v = \frac{a}{6}\left(3\cos\omega x - 3\sin\omega x - 3\cos\sqrt{3}\omega x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\omega x\right)$

[10] (1) $z_i' = \lambda_i z_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$, $z_i(x) = C_i e^{\lambda_i x} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ (2) 基本解系は $e^{\lambda_k x}\boldsymbol{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$, 一般解は $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x} \boldsymbol{p}_i$

[11] (1) $e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ (2) $\boldsymbol{y} = e^{xA}\ {}^t(c_1 \cdots c_n)$ (3) 略

[12] (1) 略 (2) $\boldsymbol{y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \boldsymbol{c} - \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{c}$ は任意の 2 次ベクトル)

[13] (1), (2) 略 (3) (i) [11] (1) と同様 (ii) $e^{xA}\ {}^t(c_1, \cdots, c_n)$ $(c_1, \cdots, c_n$ は任意定数$)$

11.5 べき級数解法

[1] (1) $y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$ (2) $c_{n+2} = -\dfrac{2}{n+2}c_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$

(3) $c_{2m} = (-1)^m \dfrac{2^m}{(2m)!!}c_0$, $c_{2m+1} = (-1)^m \dfrac{2^m}{(2m+1)!!}c_1$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

(4) $y = c_0 \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{2^m}{(2m)!!}\, x^{2m} + c_1 \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{2^m}{(2m+1)!!}\, x^{2m+1}$

[2] $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4n-3)^2(4n-7)^2\cdots 1}{(2n)!\, 2^{2n}}\, x^{2n}$

11.6 変分法

[1] $y = \cos x + \sin x$ （ヒント: Euler-Lagrange 方程式 $f_y - \dfrac{d}{dx}\, f_{y'} = 0$ を解く）

[2] (1),(2),(3) 略

[3] $y = \cos 2x$

[4] (1) 略 (2) $y = \cos x + 2\sin x$

あとがき

京都工芸繊維大学における学部学生の数学科目の学習支援のために，基盤科学系の数学科目担当教員グループでは，基盤教育学域の数学分野の教育事業として「KIT 数学学習サポートシステム」を展開している．この事業では，KIT 数学ガイドの配布および数学サポートセンターの開設等が行われている．

本冊子の「はじめに」でも触れているように，KIT 数学ガイドの趣旨は，本学の学部生に数学学習への良いガイドを提供し，さらに学習の到達目標の目安を与えることである．KIT 数学ガイドの初版（2009 年度版）は，平成 16 年度〜平成 18 年度の京都工芸繊維大学教育研究推進事業「本学における専門基礎教育（数学）の基本構想に係る調査・研究」による学内アンケート調査の結果等を参考に作成された．その後の改訂（2010 年度版 ~ 2016 年度版）を経て，2026 年度版は，令和 7 年度京都工芸繊維大学教育事業「KIT 数学学習サポートシステム教育支援経費」の援助により作成され，令和 8 年度の新入生オリエンテーション等を通して本学の新入生および全教員に配布される予定である．

数学科目は，2006 年度の本学の改組以降，専門基礎科目という枠組みの下で統一的に提供されるようになり，体系的な科目配置なども全学的な視野から可能になった．しかし，数学科目の体系や相互関係，履修の必要性が学生諸君には必ずしも十分に伝わらず，その結果いくつかの科目において受講者数の減少が生じ，その対応について検討を始めた．さらに 2009 年度には，基盤科学部門として有識者による外部評価を受け，評価委員から履修を促すための対応を求められることになった．これらの背景を踏まえ，科目を提供している教員の意図を学生側に出来るだけストレートに伝えることが必要であるとの考えに基づいて本冊子が作成された．前半の「Q and A」や「数学科目案内」では，数学科目の全体像や他分野との相互関係を概観し数学学習の必要性を示している．また，後半の「授業科目別問題集」には，本学の数学科目において過去の定期試験やレポートで出題された問題の抜粋が収録されており，各科目の到達目標の目安を与えている．「数学科目案内」の部分は今後もカリキュラム等の変更に即して改訂されることになる．さらに,「授業科目別問題集」は，本学の学生の標準的な問題集として役立つように，掲載されている問題の分類や記述方法等について検討・改良を重ねていく予定である．これらの掲載内容について，関係する方々からの率直なご意見，ご提言を頂ければ幸いである．

数学サポートセンターは，本学学生の数学関係の相談の窓口として，2010 年度より試行的に 3 号館 343 号室（数学演習室）に開設され，2012 年度からは，本学の教育事業「KIT 数学学習サポートシステム教育支援経費」等の援助により継続的に運営されている.（なお，本事業は次の経費からの支援も受けている．2012 年度：本学教育研究推進事業経費，基盤科学系長からの部局長等教育改善経費，2013 年度：基盤科学系 TA 経費，基盤科学系教育事業「KIT 知識基盤を支える基礎教育活性化事業」2016 年度・2017 年度：基盤教育学域教育改善事業経費）さらに，2014 年度後期からは，数学教室の 10 号館への移転に伴い，隣接した 11 号館 331 号室において継続して開設されることとなった．このサポートセンターには，修士学生および 3 回生以上の学部生から応募者を募り数学サポーターとして配置し，前学期は 5 月〜8 月，後学期は 11 月〜2 月までの授業期間と試験期間中に 1 日当たり 2 時限から 3 時限開室している．サポーターには，学生からの質問や学習相談に対応してもらうと同時に，自身の数学の能力を高めるための自習に努めてもらっている．さらに，数学に興味を持ってもらえるような数学関連の書籍・雑誌・DVD 及びパソコンと数学ソフトを設置し，学生の自学自習，相互学習に役立てるようにしている．サポートセンターの運営には依然として課題も多く，今後もより多くの学生に相談に訪れてもらえるような教育的効果の高い運営方法・形態を検討し逐次改善を図っていく予定である．

KIT 数学ガイドの作成に関しては，多くの方々にご協力いただいている.「授業科目別問題集」では，専任教員のみならず非常勤講師の方々からも担当授業で出題した問題を提供していただいている．特に最近の版では，非常勤講師の方のご協力により，大部分の問題の答えを収録することができた．また,「課程専門科目担当教員からのメッセージ」のページ作成に関しても関連する課程に協力していただいた．この場を借りて，関係された方々に感謝の意を表すると共に，今後の皆様の更なるご協力をお願いする次第である．

教育事業「KIT 数学学習サポートシステム教育支援経費」は，2026 年度も総合教育センターの事業経費として認められ，KIT 数学ガイドの配布および数学サポートセンターの開設が継続出来る体制が整えられる見通しである．今後も各方面から一層のご理解・ご支援をお願いできれば幸いである．

2026 年 4 月 1 日

京都工芸繊維大学　基盤教育学域　数学分野教員一同